Pienimmän vaikutuksen periaate ja stokastinen dynaaminen optimisäätö: Sovelluksia talous- ja finanssijärjestelmiin ja fysikaalisiin systeemeihin

Jussi Lindgren

Koronakriisi on ollut ja on edelleenkin merkittävä kysyntä- ja tarjontakriisi. Rokotukset tuntuvat kuitenkin onneksi tehoavan ja taloudellinen elpyminen on lähtenyt käyntiin, vaikka Omikron-variantti aiheuttaa epävarmuutta. Mittavat investoinnit vihreään siirtymään vauhdittavat osaltaan kasvua. Globaalissa makrotalouspolitiikkakeskustelussa näyttäisikin korostuvan nyt kysymys mahdollisesti kiihtyvästä inflaatiosta. Inflaatiopaineita ei ole lähihistoriassa ollut, kokonaistarjonta on riittänyt suhteessa kokonaiskysyntään – toisaalta finanssikriisin ja eurokriisin jälkeen tasetaantuma piti inflaatiota kurissa, vaikka korkokäyrä on ollut pitkään ennätysalhaalla. Sekä lyhyet rahamarkkinakorot että pitkät valtiolainojen korot ovat olleet pitkään alhaalla, nollan tuntumassa tai sen alle. Jopa kolmenkymmenen vuoden rahoituskorko on ollut negatiivinen erinomaisen luottoluokituksen omaaville valtioille. Pitkien korkojen laskeminen nollaan tai jopa sen alle on osaltaan helpottanut valtioiden velkarasitetta, vaikka koronakriisi on kasvattanut budjettialijäämiä rajusti.

Valtion velkadynamiikan kannalta keskeisiä satunnaismuuttujia ovat yhtäältä valtion velkakannan efektiivinen nimellinen korko ja toisaalta nimellisen bruttokansantuotteen kasvuvauhti. Kun velkakannan efektiivinen nimellinen korko on ollut pienempi kuin nimellisen bruttokansantuotteen vuosittainen kasvuvauhti, velkadynamiikka on ollut valtioille suotuisaa. Suotuisa velan korkotaso helpottaa selviämistä myös koronavelasta. Olennaisia kysymyksiä ovatkin, miten koron ja kasvun erotus käyttäytyy jatkossa (Rogoff 2020) ja kuinka rahoitusmarkkinat hinnoittelevat kasvavat bruttovelkatasot luottoriskipreemioihin. Miten aktiivinen finanssipolitiikka vaikuttaa talouskasvuun ja inflaatioon?

TkT, VTM Jussi Lindgren (jussi.lindgren@gov.fi) toimii valtiovarainministeriössä johtavana erityisasiantuntijana. Kirjoitus perustuu tekijän Aalto-yliopistossa 17.12.2021 tarkastettuun väitöskirjaan *The principle of least action and stochastic dynamic optimal control – Applications to economic, financial and physical systems*. Vastaväittäjänä toimi professori Grigorios A. Pavliotis (Imperial College London) ja kustoksena professori Ahti Salo Aalto-yliopistosta.

Rahoitusmarkkinoiden hinnoitteluprosessit sekä finanssi- ja rahapolitiikan keskinäinen vuorovaikutus ovat näistäkin syistä alati kiinnostavia teoreettisia ja empiirisiä kysymyksiä. Väitöskirjaani sisältyvistä osajulkaisuista kaksi käsittelee valtioiden velkakestävyyden dynamiikkaa ja rahoitusmarkkinoiden tehokkuutta stokastisissa, optimisäätöteoreettisissa viitekehyksissä. Väitöskirjan kolme muuta osajulkaisua koskevat pienimmän vaikutuksen periaatteen ja stokastisen optimisäätöteorian soveltamista teoreettiseen fysiikkaan. Osoittautuu mm., että kvanttimekaniikan keskeiset relativistiset kenttäyhtälöt ja Heisenbergin epätarkkuusperiaate voidaan johtaa stokastisesta optimisäätömallista. Optimisäätötehtäviä käsitellään väitöskirjassani nimenomaan Richard Bellmanin dynaamisen ohjelmoinnin paradigmasta käsin, vaikka käsillä olevat ongelmat olisivat periaatteessa ratkaistavissa myös Pontryaginin (stokastisella) maksimiperiaatteella.

Väitöskirjan ensimmäisessä osajulkaisussa (Lindgren 2021) rakennetaan stokastinen optimisäätömalli valtion bruttovelkasuhteelle. Mallin perusrakenne nojaa oppihistoriallisesti osin klassiseen kasvuteoriaan lähtien Ramseyn kasvumallista (Ramsey 1928). Valtion bruttovelan efektiivisen nimellisen koron ja vuotuisen nimellisen talouskasvun erotuksen stokastisen dynamiikan perusteella rakennetaan stokastinen differentiaaliyhtälö kuvaamaan valtion velkasuhteen kehitystä ajassa. Päätöksentekijän eli poliittisen hallituksen käyttämä ohjausmuuttuja on tässä mallissa perusjäämän suhde bruttokansantuotteeseen. Mallin lähtökohtana ja päätöksentekijän tavoitteena on ohjata velkasuhde alas nollaan optimaalisesti ottaen huomioon, että perusylijäämästä tai perusalijäämästä syntyy hyvinvointikustannuksia symmetrisesti. Mallissa ei ole diskonttotekijää aikapreferenssin mielessä, sillä tarkastelussa on esimerkiksi vain yksi tai kaksi vaalikautta. Usein puhutaankin niin sanotuista vaalibudjeteista, jolloin ex ante vaalikauden lopun politiikkavalintojen merkitys korostuu. Mallintamisfilosofia osajulkaisussa perustuu paljon poliittisen taloustieteen kirjallisuudessa esitetyille lähtökohdille (Alesina ja Passalacqua 2015).

Malli on teknisessä mielessä lineaaris-neliöllinen stokastinen optimisäätötehtävä jatkuvassa ajassa. Ratkaistavaksi jää siten epälineaarinen Hamilton-Jacobi-Bellman osittaisdifferentiaaliyhtälö optimisäätötehtävän arvofunktiolle. Ratkaisu löydetään suljetussa muodossa. Optimaalinen perusjäämäpolitiikka riippuu ratkaisussa lineaarisesti valtion velkasuhteesta ja sopeutuksen aikariippuvuus on muodoltaan eksponentiaalista.

Malliin lisätään tämän jälkeen piilotetut finanssipolitiikan kerroinvaikutukset sekä piilotetut velan luottoriskipreemiot. Piilotetut muuttujat tarkoittavat tässä yhteydessä sitä, että päätöksentekijä ei havainnoi niitä suoraan. Finanssipolitiikan eli tässä yhteydessä suhteellisen perusjäämän oletetaan vaikuttavan mallissa suoraan talouskasvuun ja luottoriskipreemioon. Samoin oletetaan, että velkasuhde vaikuttaa sekä kasvuun että efektiiviseen korkoon, jonka voidaan ymmärtää tulevan reaktiona rahoitusmarkkinoilta. Finanssipolitiikan kerroinvaikutus ja luottoriskipreemiot huomioiden malli osoittaa velkasuhteen noudattavan epälineaarista stokastista differentiaaliyhtälöä. Epälineaaristen stokastisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen kehitystä ajassa on vaikeaa ennakoida.

Mikä on mallin ja tulosten merkitys käytännössä? Ensinnäkin malli osoittaa, kuinka velkasuhde käyttäytyy dynaamisesti stokastisessa korko-kasvu-ympäristössä, kun päätöksentekijä tekee aktiivista finanssipolitiikkaa velkasuhteen hallitsemiseksi. Toiseksi malli antaa arvion valtion maksukyvyttömyysriskeistä korko-kasvu-erotuksen tilastollisten parametrien funktiona. Mallissa määritetään varianssi valtion velkasuhteelle mallin parametrien funktiona.

Päivittäisessä politiikanteossa malli voi antaa eväitä valtion velanhallintaan valtion tehdessä riskinhallinnallisia ratkaisuja valtion velkasalkun duraation ja muiden riskinhallintamuuttujien osalta (Valtiovarainministeriö 2018; 2021). Velanhallinnassa keskeinen riskitekijä on juuri valtion velan korkoriskiasema, joka riippuu yhtäältä velkasalkun maturiteettirakenteesta ja toisaalta käytetyistä koronvaihtosopimuksista. Kun valtioilla on nykyisin paljon aiempaa enemmän velkaa suhteessa bruttokansantuotteeseen, valtioiden riskinsietokyky korkoriskin osalta on heikentynyt. Velanhallinnassa tulisi pyrkiä optimoimaan nimenomaan riskisuureita kokonaistaseen ja etenkin valtion velkasuhteen näkökulmasta, ja tähän tarpeeseen väitöskirjassa esitetty malli osaltaan vastaa. Euroalueella yksittäisen valtion korkoriskin hallinta korostuu, koska pienen avotalouden kuten Suomen bruttokansantulon kasvu ei välttämättä seuraa yleistä korkotasoa euroalueella.

Malli myös vahvistaa käsitystä, että makrotaloudellinen ja finanssipoliittinen dynamiikka voi olla epälineaarista, jopa stokastisesti kaoottista. Koska finanssipoliittinen aktivismi voi johtaa ei-ennustettavaan dynamiikkaan, keskuspankeilla voi olla houkutus optimoida suoraan suureita, jotka liittyvät valtioiden velkakestävyyteen. Tällöin voi ajatella, että keskuspankki pyrkii pitämään velan korkotason riittävän alhaisena ja nimellisen kansantulon kasvun riittävän korkeana riittävän pitkään. Tämän politiikkaoption kustannus voi olla korkea inflaatio. Tarjontarajoitteiden vallitessa korkokäyrän alhainen asemointi voi johtaa korkeaan inflaatioon – raha on halpaa ja alijäämien rahoittaminen on samoin halpaa – ainakin hetkellisesti. Riippumattomien keskuspankkien *ratio* perustuu juuri siihen, että tunnustetaan valtioiden poliittiset kannustimet ja asetetaan inflaatiokontrolli riippumattomille asiantuntijoille.

Väitöskirjan toinen osajulkaisu (Lindgren 2020) käsittelee rahoitusvaateiden hinnoittelua ja tehokkaiden markkinoiden matemaattista rakennetta. Perinteisesti kirjallisuudessa rahoitusvaateiden hinnoittelussa lähdetään siitä, että rahoitusvaateen, kuten option, kohdeetuus noudattaa jotain tiettyä satunnaisprosessia, kuten geometrista Wiener-prosessia, josta arbitraasivapausargumentilla johdetaan rahoitusvaateen hinta esimerkiksi deltasuojausmenetelmällä. Tämä lähestymistapa on klassisen *Black-Scholes* -hinnoittelumallin keskiössä (Black ja Scholes 1973). Tutkimuksessani lähdetään ikään kuin tämän asetelman käänteisongelmasta: kysytään, millainen stokastinen optimisäätötehtävä rahoitusmarkkinalle tuottaa arvofunktion ratkaisuna osittaisdifferentiaaliyhtälön, joka on linearisoituna ekvivalentti Black-Scholes -osittaisdifferentiaaliyhtälölle. Osoittautuu, että markkinalle voidaan rakentaa mielekäs minimointitehtävä, jossa

markkina systeeminä minimoi määrättyä markkinainformaatioon liittyvää kustannusfunktionaalia. Tehtävän *Hamilton-Jacobi-Bellman* -yhtälön linearisoitu muoto vastaa rakenteeltaan tässä tapauksessa täsmälleen Black-Scholes -osittaisdifferentiaaliyhtälöä.

Mallin lähtökohta perustuu ajatukselle tehokkaiden markkinoiden hypoteesista: rahoitusmarkkinat vievät rahoitusvälineiden hintoihin kaiken uuden informaation mahdollisimman tehokkaasti ja nopeasti. Tehokkaiden markkinoiden hypoteesi (ks. Fama 1970) ei siis väitä mitään vahvaa arvopapereiden hintamuutosten tilastollisesta jakautumisesta suoraan, vaan toteaa vain, että kaikki oleellinen, markkinoilla saatavilla oleva informaatio on markkinahinnoissa sisällä.

Osajulkaisun markkinamalli on siis tehokkaiden markkinoiden hypoteesin eräs matemaattinen ilmenemä ja operationalisointi. Black-Scholes -hinnoitteluyhtälön lisäksi mallista saadaan suoraan kuljetusyhtälö markkinan hetkellisille tuotoille. Kuljetusyhtälö on takaperoinen Burgers - osittaisdifferentiaaliyhtälö, jota kirjallisuudessa on käytetty mm. hydrodynaamisen turbulenssin mallina. Turbulenssi ja tehokkaat markkinat liittyvät siis toisiinsa tämän epälineraarisen osittaisdifferentiaaliyhtälön avulla. Mallia voitaisiin luontaisesti laajentaa erilaisiin varallisuusportfolioihin, vaikka väitöskirjani osajulkaisussa rahoitusvaateen kohde-etuus on yksittäinen rahoitusväline. Varallisuusportfolioiden tapauksessa tulee huomioida myös varallisuuserien mahdollinen korrelaatiorakenne, joka voi vaikeuttaa mallin laskentaa olennaisesti. Dynaaminen ohjelmointi tunnetusti on erittäin raskasta laskennallisesti, kun tila-avaruus kasvaa.

On merkillepantavaa, että sama kuljetusyhtälö markkinan tuotolle on johdettu eri näkökulmasta aiemmassa kirjallisuudessa (Hodges ja Carverhill 1993). Siinä hyödynnettiin polkuriippumattomuusargumenttia ja Girsanovin mitanvaihtoteoreemaa stokastisesta analyysistä. Väitöskirjassani esitetyn mallin osalta eräs aihio jatkotyölle voisi liittyä esimerkiksi parametrien estimointiin koskien tasapainojakaumaa kohde-etuuksille. Osajulkaisussa esitetty stokastisen prosessin tasapainojakauma vastaa olennaisesti termodynamiikan toista pääsääntöä, jonka mukaisesti systeemi pyrkii spontaanisti kohti Gibbs'n maksimientropiajakautumaa, jossa vapaa energia minimoituu. Muita mahdollisia jatkotutkimuksen aiheita voisivat olla esimerkiksi kohde-etuuden satunnaisprosessin yleistäminen laajempaan luokkaan prosesseja, kuten esimerkiksi stokastisen volatiliteetin mallit, tai erilaisten markkinaepätäydellisyyksien mallintaminen. Malli voisi olla hyödyllinen esimerkiksi algoritmisille varainhoitajille ja vipurahastoille, kun testataan ja mitataan rahoitusmarkkinan tehokkuusastetta tai halutaan ennakoida keskimääräisiä markkinatuottoja uusilla, eksoottisilla markkinoilla. □

Kirjallisuus

Rogoff, K. (2020), "Falling real interest rates, rising debt: A free lunch?", *Journal of Policy Modeling* 42: 778-790.

Alesina, A. ja Passalacqua, A. (2015), "The political economy of government debt", Working Paper 21821, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA.

Lindgren J. (2021), "Examination of interest-growth differentials and the risk of sovereign insolvency", *Risks* 9, https://doi.org/10.3390/risks9040075.

Ramsey, F. (1928), "A mathematical theory of saving", *The Economic Journal* 38: 543–59, https://doi.org/10.2307/2224098.

Valtiovarainministeriö (2018), *Valtion velanhallinnan kehittämistarpeita arvioivan asiantuntijaryhmän työryhmämuistio*, Valtiovarainministeriön julkaisuja 25/2018.

Valtiovarainministeriö (2021), *Valtion velanhallintamallin arviointi ja kehittämistarpeet -työryhmän muistio*, Valtiovarainministeriön julkaisuja 69/2021.

Lindgren, J. (2020), "Efficient markets and contingent claims valuation: An information theoretic approach", *Entropy* 22, 1283, https://doi.org/10.3390/e22111283.

Black, F. ja Scholes, M. (1973), "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81: 637–54.

Fama, E.F. (1970), "Efficient capital markets: A review of theory and empirical work", *Journal of Finance* 25: 383–417, https://doi.org/10.2307/2325486.

Hodges, S. ja Carverhill, A. (1993), "Quasi mean reversion in an efficient stock market: The characterisation of economic equilibria which support Black-Scholes option pricing", *The Economic Journal* 103 395–405, https://doi.org/10.2307/2234778.