

# Tapainmuodostuksen ja Lévy-prosessien sovelluksia rahoitusteoriassa

Antti Huotari

Väitöskirjan lähtökohtana on kaksi perin klassista rahoitusteorian ongelmaa: optimaalisen sijoitussalkun ratkaiseminen ja optioiden hinnoittelu. Kolmessa ensimmäisessä esseessä tarkastellaan kuluttajan sijoitussalkun valintaa ja viimeisessä korkoswapien mallintamista matlan korkotason ympäristössä. Kaikkien esseiden tavoitteena on rahoitustaloustieteen mallien kehittäminen empiirisesti havaittujen puutteiden suhteen.

Merton (1971) tutki sijoittavan kuluttajan salkunvalintaongelmaa jatkuva-aikaisessa kehikossa. Hän oletti riskillisten varallisuuserien noudattavan geometrista Brownin liikettä, ja ratkaisi kuluttajan stokastisen dynaamisen optimointiongelman Itôn lemmaa soveltamalla. Merton tarkasteli tilannetta, jossa kuluttajan

hyötyfunktio oli aikaseparoituva ja ns. HARA- (hyperbolisen absoluuttisen riskiaversion) muotoa. Aikaseparoituvuus oli pitkään standardiominaisuus hyötyfunktiolle rahoitustaloustieteessä. Empiirisesti kuitenkin huomattiin, että aikaseparoituvan hyötyfunktion soveltaminen tuotti usein sekä kulutus- että sijoituskäyttäytymisen osalta epärealistisia tuloksia. Esimerkiksi sijoittajien pitäisi mallien perusteella suosia enemmän riskillisiä sijoituksia kuin mitä todellisuudessa tapahtuu.

Aikaseparoituvuuteen liittyvien ongelmien vuoksi on syntynyt varsin laaja kirjallisuus erilaisista ei-separoituvien hyötyfunktion oletuksista. Käytetyin näistä on ns. tapainmuodostus-hyötyfunktio (*habit formation*). Tällöin oletetaan, että ajanhetken  $t$  hyöty ei riipu vain sa-

Kirjoitus perustuu Helsingin yliopistossa 18. syyskuuta 2020 tarkastettuun väitöskirjaan *Habit Formation and Lévy Process Applications in Stochastic and Numerical Finance*. Vastaväittäjänä toimi tutkijatohtori Mitri Kitti Turun yliopistosta ja kustoksena professori Hannu Vartiainen Helsingin yliopistosta. VTT Antti Huotari (antti.huotari@saastopankki.fi) työskentelee Säästöpankkiryhmässä risk managerina.

man ajanhetken kulutuksesta, vaan myös aiempien ajanhetkien kulutuksesta. Siten aiemmin saavutettu elintaso tai kulutustottumukset vaikuttavat siihen, millaisen hyödyn kuluttaja ajanhetkellä  $t$  saa. Tässä tilanteessa optimointiongelman ratkaiseminen kuitenkin muuttuu hankalammaksi.

Tapainmuodostushyötyfunktioita ovat soveltaneet Mertonin ongelmaan esimerkiksi Detemple ja Zapatero (1992), Egglezos ja Karatzas (2009) sekä Munk (2008). Väitöskirjani kahdessa ensimmäisessä esseessä tutkin sijoitettavan kuluttajan salkunvalintaongelmaa, kun kuluttajan hyötyfunktio noudattaa kyseistä muotoa. Ensimmäinen essee tarkastelee erityisesti ns. ei-addiktiivista tapainmuodostusta, jolloin kulutustason laskua aiemman elintason alapuolelle ei suoraan rajata mallin oletuksien avulla pois (ks. Detemple ja Karatzas 2003). Esseessä esitetään optimointiongelman suljettu ratkaisu tällaisessa tilanteessa kuluttajan välittömän hyötyfunktion ollessa HARA-muotoa. Tämän kaltainen funktiomuoto on soveltamisen kannalta kätevä, koska hyötyfunktio voidaan määrittellä niin, että hyötytasoon vaikuttavat yhtä aikaa sekä elintasotekijä että HARA-funktion vakio parametri. Tapainmuodostushyötyfunktion käyttö pienentää riskillisten sijoitusten painoa kuluttajan sijoitusstrategiassa, koska hän haluaa pienempiriskisen salkun avulla turvata jo saavuttamansa elintason.

Toisessa esseessä kehittelen numeerista ratkaisumenetelmää salkkuoptimoinnin ratkaisemiseksi, kun kuluttajan käyttäytymistä edelleen mallinnetaan tapainmuodostushyötyfunktion avulla. Esseessä ongelmaan sovelletaan ns. Monte Carlo -kovariaatiomenetelmää (ks. Cvitanic ym. 2003), joka on siinä mielessä joustava, että erilaiset oletukset rahoitusvarojen hintojen käyttäytymisestä markkinoilla ovat mahdolli-

sia. Esseen numeerisessa esimerkissä sovelletaan korkoihin Cox-Ingersoll-Ross -dynamikkaa ja osakemarkkinahinnat ovat keskiarvoon palautuvia.

Black ja Scholes (1973) muodostivat Itô-lemmaa hyödyntäen osittaisdifferentiaaliyhtälön, jota he käyttivät optioiden hinnoitteluun. He kuvasivat option kohde-etuutena olevan osakkeen kehitystä geometrisen Brownin liikkeen avulla. Koska tämä oletus helpottaa monella tavalla mallintamista, siitä tuli hyvin yleinen rahoitusteoriassa.

Geometrinen Brownin liike ei kuitenkaan kykene tavoittamaan monia osakehintojen käyttäytymiselle tyypillisiä ominaisuuksia (kuten jakauman paksuhäntäisyys tai volatilitiitin vaihtelu), minkä vuoksi rahoitusteoriassa on paljon etsitty realistisempia jakaumaoletuksia. Varsin usein ongelmaa on lähestytty erilaisten Lévy-prosessien avulla, ja Lévy-prosesseja hyödyntävä rahoitusteoreettinen kirjallisuus onkin kasvanut nopeasti 1990-luvulta alkaen.

Lévy-prosessi on yleisempää muotoa oleva stokastinen prosessi, jonka erikoistapauksia esimerkiksi Brownin liike, Poisson-prosessi ja edellisiä yhdistelevä hyppy-diffuusioprosessi ovat. Lévy-prosessi on matemaattisesti hyvin tunnettu ja sillä on soveltamisen kannalta miellyttäviä ominaisuuksia. Jonkin geometrista Brownin liikettä yleisemmän jakauman soveltaminen kuitenkin vaikeuttaa yleensä ratkaisun löytämistä huomattavasti eikä vähiten sen takia, että rahoitusteorian perustyökalujen, kuten arbitraasihinnoittelun ja markkinoiden täydellisysoletuksen toimivuus ei silloin ole taattu.

Kolmannessa esseessä tarkastellaan kuluttajan portfolion valintamallia, jossa osakkeiden hinnat noudattavat hyppy-diffuusioprosessia. Koska tarkasteltavalle ongelmalle ei voida löytää suljettua matemaattista ratkaisua, esseessä

kehittelään numeerista ratkaisumenetelmää. Lähtökohtana on varsin suoraviivaisesti ja helposti käytettävän Markovin ketjuapproksimaatiomenetelmän soveltaminen dynaamiseen optimointiongelmaan. Käytän optioiden hinnoittelusta tuttua eksplisiittistä-implisiittistä äärellisten differenssien menetelmää, joka perustuu ns. integro-differentiaaliyhtälön numeeriseen ratkaisemiseen. Esseän numeerinen esimerkki tarkastelee yhden riskillisen varallisuuserän tapausta, mutta esitettyä menetelmää on helppo soveltaa myös useampiulotteiseen tilanteeseen.

Viime vuosien aikana korot ovat länsimaisissa laskeneet ennennäkemättömän alhaiselle tasolle. Matala korkotaso ei ole pelkästään heikentänyt luottolaitosten korkokatteita ja laskenut sijoittajien tuotto-odotuksia, vaan on myös aiheuttanut uusia haasteita rahoitustutkimuksen perinteisille korkomalleille.

Tyypillisesti vaihtelua korkomarkkinoilla on kuvattu Blackin (1976) mallin avulla muodostetulla implisiittisellä volatilitteetilla. Malli on ongelmallinen useasta syystä. Sen oletukseen kohde-etuutena olevan koron log-normaalijakautuneisuudesta pätee samat ongelmat kuin vastaavilla osakemarkkinamalleilla.

Matala ja mahdollisesti negatiivinen korkotaso on Blackin mallille erityisen ongelmallinen. Negatiivinen korkotaso ei tietenkään ole mahdollinen lognormaalijakauman tapauksessa. Koska jakauma toisaalta perustuu suhteellisiin muutoksiin, saavat lähellä nolaa tapahtuvat absoluuttisesti pienetkin muutokset suuria arvoja.

Korkotason vaihtelun mallintaminen on tärkeää osana institutionaalisten sijoittajien markkinariskien hallintaa. Erityinen merkitys sillä nykyisin on eurooppalaisille vakuutusyhtiöille, joiden vakavaraisuuteen riskittömät

korkokäyrät vaikuttavat suoraan vastuuvelan markkinaperusteisen hinnoittelun vuoksi.

Väitöskirjan viimeisessä esseessä etsin mallia, jolla ei olisi Blackin mallin ongelmia ja joka toimisi erityisesti matalan korkotason ja nopeiden muutosten ympäristössä. Esimerkiksi Björk ym. (1997) sekä Glasserman ja Kou (2003) ovat tarkastelleet monipuolisesti hyppy-diffuusio-prosessin soveltamista korkomalleihin.

Esseeni esittelee uuden korkoswaptionien hinnoittelumallin, jossa yhdistetään Bachelierin (1900) normaalijakaumaan perustuva optioiden hinnoittelumalli hyppy-diffuusiomalliin. Numeerisessa esimerkissä sovellan hinnoittelumenetelmää euroswap-korkojen vaihtelun mallintamiseen. Artikkelissa osoitetaan, että uudella mallilla pystytään kuvaamaan huomattavasti Blackin mallia robustimmin korkomarkkinoiden vaihtelua kevään 2015 nopeasti muuttuvan korkotason tilanteessa. □

## Kirjallisuus

- Bachelier, L. (1900), "Théorie de la spéculation", *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3: 21–86.
- Björk, T., Kabanov, Y. ja Runggaldier, W. (1997), "Bond market structure in the presence of marked point processes", *Mathematical Finance* 7: 211–239.
- Black, F. ja Scholes, M. (1973), "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81: 637–654.
- Cvitanic, J., Goukasian, L. ja Zapatero, F. (2003), "Monte Carlo computation of optimal portfolios in complete markets", *Journal of Economic Dynamics and Control* 27: 971–986.

- Detemple, J. B. ja Karatzas, I. (2003), “Non-addictive habits: Optimal consumption-portfolio policies”, *Journal of Economic Theory* 113: 265–285.
- Detemple, J. B. ja Zapatero, F. (1992), “Optimal consumption-portfolio policies with habit formation”, *Mathematical Finance* 2: 251–274.
- Glasserman, P. ja Kou, S. G. (2003), “Term structure of simple forward rates with jump risk”, *Mathematical Finance* 13: 383–410.
- Egglezos, N. ja Karatzas, I. (2009), “Utility maximization with habit formation: Dynamic programming and stochastic PDE’s”, *SIAM Journal on Control and Optimization* 48: 481–520.
- Merton, R. C. (1971), “Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model”, *Journal of Economic Theory* 3: 373–413.
- Munk, C. (2008), “Portfolio and consumption choice with stochastic investment opportunities and habit formation in preferences”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 32: 3560–3589.