

Ei-kääntyvien aikasarjamallien ekonometriaa

Juho Nyholm

Linearisista aikasarjalleista on viime vuosikymmenten aikana kehittynyt empiirisen rahoitus- ja makrotaloustieteen työjuhtia. Syitä mallien suosiolle on löydettävissä useita. Näiden mallien avulla kuvataan taloudellisten muuttujien samanaikaista ja dynaamista lineaarista riippuvuutta. Lisäksi talousteoriaa soveltamalla on mahdollista muodostaa malleihin rakenteellisuutta, jonka avulla pystytään identifioimaan yksittäisiin muuttujiin kohdistuvia eksogeenisiä sokkeja. Nämä sokit ovat tulkittavissa ennustamattomiksi yllätyksiksi. Sokkeja identifioimalla pystytään uskottavasti arvioimaan esimerkiksi politiikkamuutosten kokonaistaloudellisia vaikutuksia.

Vaikka talousteoriassa yleisesti käytettävät kokonaistaloudelliset mallit (esimerkiksi DSGE-mallit) eivät ole parametrien suhteen lineaarisia, niillä on tiukka yhteys lineaarisiin aikasarjalleihin. Kokonaistaloudellisten mallien linearisoidut ratkaisut ovat autoregressiivisiä liukuvan keskiarvon malleja (ARMA). VAR-mallien avulla kokonaistaloudellisia mallien ratkaisuja voidaan approksimoida erittäin tarkasti.

Kun mallien yleiset oletukset pätevät, kokonaistaloudellisten mallien implikoimat lineaariset aikasarjamallit ovat fundamentaalisia. Tällä tarkoitetaan, että havaitut aikasarjat riittävät mallin virhetermien identifioimiseen.

Kirjoitus perustuu Helsingin yliopistossa 15. marraskuuta 2019 tarkastettuun väitöskirjaan *Essays on noninvertible ARMA models*. Vastaväittäjänä toimi apulaisprofessori Rickard Sandberg (Stockholm School of Economics) ja kustoksena professori Mika Meitz (Helsingin yliopisto). VTT Juho Nyholm (jtnyholm@gmail.com) toimii valtiovarainministeriön kansantalousosastolla finanssiasiantuntijana.

Kaikissa tilanteissa näin ei kuitenkaan ole. Hansen ja Sargent (1991) osoittavat, että todellinen approksimaatio on ei-fundamentaalin, mikäli kokonaistaloudellisessa mallissa taloudellisten toimijoiden käyttäytyminen pohjautuu odotuksiin, joiden taustalla olevaa informaatiota ekonometrikolla ei aikasarjamallia estimoidessaan ole käytettävissä. Ekonometrikon käytössä oleva aineisto ei tässä tapauksessa riitä identifioimaan mallin virhetermejä.

Ei-fundamentaaliin esityksiin on viime aikoina kokonaistaloudellisten mallien kohdalla päädytty esimerkiksi rahoitustaloustieteessä (Kasa ym. 2014) ja makrotaloustieteessä tutkittaessa finanssipolitiikan ennakoitavuutta (Leeper ym. 2013) tai uutissokkien (Blanchard ja Perotti 2012; Forni ja Gambetti 2014) vaikutuksia.

Nämä esimerkit osoittavat, että tavanomaiset aikasarjamallit eivät välttämättä sovellu parhaalla mahdollisella tavalla kokonaistaloudellisten vaikutusten analysointiin. Jos datan generoinut prosessi on ei-fundamentaalin, se on aikasarjamallia estimoitaessa otettava huomioon. Ei-kääntyvät ja ei-kausaalet aikasarjamallit tarjoavat yhden ratkaisun tähän ongelmaan, sillä ne ovat ratkaisuja ei-fundamentaalisille kokonaistaloudellisille malleille. Aikasarjatilastotieteessä ei-kääntyvyydellä (ei-kausaaletuudella) tarkoitetaan, että tilastollisen mallin MA-polynomin (AR-polynomin) juurista kaikki eivät sijaitse yksikköympyrän ulkopuolella kompleksitasossa. Ei-fundamentaaliuus saattaa syntyä kohtalaisen harmittomistakin oletuksista talouden toiminnasta. Esimerkiksi yllä mainitussa finanssipolitiikan ennakoitavuutta käsittelevässä tutkimuksessa näytetään, että jos taloudelliset toimijat pystyvät havaitsemaan veronkorotukset ennakolta ja toimivat tämän signaalin saatuaan rationaali-

sesti, pääoman kasautuminen noudattaa mallissa ei-kääntyvää ARMA-prosessia. Jos ekonometrikolla ei ole käytössään aineistoa näistä finanssipolitiikan muutoksista ennakoivista signaaleista ja jos hän mallintaa pääoman kasautumista tavanomaisella kääntyvällä ja kausaaletisella aikasarjamallilla, johtopäätökset saattavat olla hyvinkin harhaanjohtavia.

Ei-kääntyvien prosessien havaitseminen ilman kokonaistaloudellisten mallien antamaa informaatiota voi osoittautua vaikeaksi. Näiden prosessien identifioiminen aineistoista on mahdotonta, mikäli havainnot ovat normaali-jakautuneita tai hyvin lähellä sitä. Sen sijaan normaalista poikkeavat ei-Gaussiset jakaumat tarjoavat enemmän informaatiota prosessien todennäköisyysrakenteesta. Sitä hyödyntäen ei-kääntyvät prosessit pystytään erottamaan kääntyvistä. Näin ollen aineistoja analysoitaessa on syytä testata, vaikuttaako normaalijakauma uskottavalta todennäköisyysjakaumalta havainnoille. Jos näin ei ole, ei-kääntyvien prosessien identifioiminen on mahdollista tilastollisilla menetelmillä.

Ei-kääntyvät prosessit ovat hyödyllisiä myös puhtaasti empiirisestä näkökulmasta. Näillä malleilla pystytään mallintamaan prosessien autokorrelaatorakenteita yhtä rikkaasti kuin tavanomaisillakin ARMA-malleilla. Ei-kääntyvien prosessien ominaisuuksista on kuitenkin johdettavissa esitys, jossa mallin autokorrelaation virhetermi ei ole riippumaton prosessi. Tämä esitys havainnollistaa sitä, että mallilla on mahdollista kontrolloida myös aineistoissa havaittavia epälineaarisia piirteitä, kuten lievää heteroskedastisuutta. Tämä ominaisuus on havaittu erittäin hyödylliseksi finanssiaikasarjoja analysoitaessa.

Väitöskirja jatkaa ei-kääntyvien ARMA-mallien teoreettisten ominaisuuksien tutki-

musta. Ensimmäisessä luvussa käsitellään ei-kääntyvän ARMA-mallin sopivuuden tarkastelua. Siinä esiteltävien diagnostisten testien avulla voidaan testata mallin virhetermien riippumattomuusoletusta. Testien avulla on mahdollista testata lineaarista riippumattomuutta virhetermeissä sekä niiden neliöidyissä arvoissa. Testit ovat luonteeltaan samanlaisia kuin Boxin ja Piercen (1970) ja McLeodin ja Lin (1983) esittelemät portmanteau-testit tavanomaisille kääntyville ja kausaalille ARMA-malleille. Tässä tutkimuksessa hyödynnetään Meitzin ja Saikkosen (2013) ei-kääntyville ARMA-malleille esittelemää estimointiteoriaa ja johdetaan testisuureille asymptoottinen jakauma, jonka avulla oletusta lineaarisesta riippumattomuudesta on mahdollista testata tilastollisesti.

Testien avulla on mahdollista valita oikeat asteet mallin polynomeille. Lisäksi testien avulla on mahdollista havaita, onko ei-kääntyvä malli analyysiin soveltuva. Hyödyntämällä prosessin ei-Gaussista jakaumaa voidaan testien avulla saada viitteitä siitä, olisiko tavanomainen kääntyvä malli sittenkin parempi kuvaus prosessista. Koska jokaista ei-kääntyvää prosessia vastaa kääntyvä prosessi, jolla on täysin sama autokorrelaatiorakenne, niitä tutkimalla ei voida erotella näitä malleja toisistaan. Sen sijaan neliöityjä residuaaleja tutkimalla voidaan saada viitteitä siitä, että valittu malli kuuluukin väärään kategoriaan.

Väitöskirjan toinen luku käsittelee ei-kääntyvän ARMA-mallin estimointiteoriaa. Finanssiaikasarjoissa havaitaan usein suuria poikkeamia tai piikkejä. Esimerkiksi osakkeiden arvoja tutkittaessa havaitaan, että ne saattavat muuttua yhden päivän aikana hyvinkin suuresti. Myös kaupankäynnin volyymeissa on havaittavissa poikkeavia päiviä, kuten tämän luvun

empiirisessä esimerkissä havainnollistetaan. Nämä poikkeamat saattavat aiheuttaa harhaa tilastollisen mallin estimaattoreihin, mikäli niitä ei oteta asianmukaisella tavalla huomioon. Yksi ratkaisu tähän on olettaa aikasarjamallin virhetermille paksuhäntäinen jakauma, joka sallii ajoittaisia hyvinkin suuria poikkeamia. Tämän kaltaisten prosessien estimointi on kuitenkin tavanomaisesta poikkeavaa, sillä tavanomaisesti ARMA-mallien estimointiteoria olettaa, että virhetermeillä on äärelliset toiset momentit. Paksuhäntäisten jakaumien tapauksessa tämä oletus ei kuitenkaan ole voimassa, sillä näillä prosesseilla toiset momentit eivätkä mahdollisesti myöskään ensimmäiset momentit ole äärellisiä.

Tavanomaisten ARMA-mallien kohdalla estimointiteoriassa on hyödynnetty oletusta virhetermin α -stabiilista jakaumasta (Davis 1996). Tämä oletus osoittautuu hyödylliseksi oletukseksi myös ei-kääntyvien ARMA-mallien tapauksessa. Tämän jakauman ominaisuuksia hyödyntäen luvussa osoitetaan, että mallin parametrien suurimman uskottavuuden estimaattoreilla on olemassa rajajakaumat. AR- ja MA-parametrien jakauma ei ole mikään standardi todennäköisyysjakauma, mutta mallin muut parametrit ovat asymptoottisesti normaalijakautuneita.

Toisessa luvussa analysoidaan Walmart-kauppaketjun osakkeen päivittäistä kaupankäyntiä. Estimointitulokset osoittavat, että ei-kääntyvä malli on hyvä sovite aineistoon ja kykenee mallintamaan kaupankäynnin dynamiikkaa hyvin. Sovitteen residuaaleista ei löydy merkkejä lineaarisesta riippuvuudesta, ja malli kontrolloi myös aineistossa havaittavaa heteroskedastisuutta. Jakauman parametrien estimaattorit myös osoittavat, että tavanomaisempi jakauma, jonka varianssi on äärellinen,

ei vaikuttaisi uskottavalta ottaen huomioon aineistossa havaittavia poikkeamia.

Väitöskirjan kolmas luku jatkaa ensimmäisen luvun teeman parissa. Siinä edellä kuvattuja testejä hyödynnetään osaketuottoaikasarjojen ennustettavuuden testaamisessa. Vaikka ei-kääntyvät prosessit saattavat olla lineaarisesti riippumattomia, ne ovat aina ennustettavia. Jos ei-kääntyvä ARMA-malli havaitaan hyväksi kuvaukseksi prosessille, sen ominaisuuksia hyödyntämällä voidaan testata ennustettavuutta tilastollisesti. Koska edellä kuvatut diagnostiset testit antavat tukea ei-kääntyvän ARMA(1,1)-mallin sopivuudelle useiden tuottoaikasarjojen kohdalla, on mielekästä hyödyntää Lanteen ym. (2013) esittelemää kaksivaiheista testausmenetelmää ennustettavuudelle. Aluksi testataan lineaarista riippumattomuutta, ja jos tämä hypoteesi jää voimaan, testataan hypoteesia epälineaarista riippumattomuudesta. Tämän hypoteesin jäädessä voimaan prosessi tyypistyy ei-kääntyvästä mallista vahvaksi valkoiseksi kohinaksi. Luvussa esitetään runsaasti näyttöä siitä, että ei-kääntyvä ARMA-malli on soveltuva mallintamaan tuottoaikasarjoja ja havaitsemaan ennustettavuutta niissä. Löydetty epälineaarinen ennustettavuus on sopusoinnussa esimerkiksi tavanomaisten kulutukseen perustuvien dynaamisten hinnoittelumallien kanssa (*consumption based capital asset pricing model*). □

Kirjallisuus

- Blanchard, O. ja Perotti, R. (2002), “An empirical characterization of the dynamic effects of changes in government spending and taxes on output”, *Quarterly journal of economics* 117: 1329–1368.
- Box, G. ja Pierce, D. (1970), “Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models”, *Journal of the American Statistical Association* 65: 1509–1526.
- Davis, R. (1996), “Gauss-Newton and M-estimation for ARMA processes with infinite variance”, *Stochastic processes and their applications* 63: 75–95.
- Forni, M. ja Gambetti, L. (2014), “Sufficient information in structural VARs”, *Journal of monetary economics* 66: 124–136.
- Hansen, L. ja Sargent, T. (1991), “Two difficulties in interpreting vector autoregressions”, teoksessa Hansen, L., Sargent, T., Heaton, J., Marcet, A. ja Roberds, W. (toim.), *Rational expectations econometrics*. Westview Press Boulder.
- Lanne, M., Meitz, M. ja Saikkonen, P. (2013), “Testing for linear and nonlinear predictability of stock returns”, *Journal of financial econometrics* 11: 682–705.
- Kasa, K., Walker, T. ja Whiteman, C. (2014), “Heterogeneous beliefs and tests of present value models”, *Review of economic studies* 81: 1137–1163.
- Leeper, E., Walker, T. ja Yang, S.-C. (2013), “Fiscal foresight and information flows”, *Econometrica* 81: 1115–1145.
- McLeod A. ja Li, W. (1983), “Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations”, *Journal of time series analysis* 4: 269–273.
- Meitz, M. ja Saikkonen, P. (2013), “Maximum likelihood estimation of a non-invertible ARMA model with autoregressive conditional heteroscedasticity”, *Journal of multivariate analysis* 114: 227–255.