

Vuoden 2012 taloustieteen nobelistit Alvin E. Roth ja Lloyd S. Shapley

Hannu Salonen

Professori

Turun yliopisto

Palkinnon myöntämisen perusteena oli tällä kertaa kirjoittajien kontribuutiot stabiilien allokatioiden teoriaan (*stable allocations*) ja markkinoiden suunnitteluun (*market design*). Molemmille tutkijoille tätä tunnustusta on odotettu jo jonkin aikaa. Viime syksynä odotukset vihdoinkin toteutuivat. Tässä kirjoituksessa kuvailen ensin lyhyesti palkittujen uran varhaisvaiheita. Sen jälkeen käsitelen palkinnon myöntämiseen johtaneita töitä, erityisesti stabiilien allokatioiden teoriaa.¹

Shapley syntyi vuonna 1923. Hän väitteli matematiikan tohtoriksi Princetonin yliopistossa 1953. Samana vuonna hän julkaisi tutkimukset *A value for n-person games* (Shapley 1953a) ja *Stochastic games* (Shapley 1953b). Näistä kumpi tahansa olisi riittänyt takaamaan paikan peliteoreetikkojen eturivistä. Shapley-arvo ja Nash-ratkaisu ovat tunnetuimmat ja sovelle-

tuimmat kooperatiivisten pelien yksiarvoiset ratkaisukäsitteet. Stokastisia pelejä käsittelevä artikkeli on löydetty uudelleen 15 viime vuoden aikana, kun tätä pelien luokkaa on toden teolla ryhdytty tutkimaan.

Näistä artikkeleista alkoi Shapleyn huikea tutkijan ura, joka on jatkunut aktiivisena aivan viime vuosiin asti. Hänen tuotantonsa on paitsi laajaa (peliteoriaa laidasta laitaan, yleisen tasapainon teoriaa, päätösteoriaa) myös kauttaaltaan korkeatasoista. Teoreemojen todistukset ovat useimmiten lyhyitä ja elegantteja sisältäen silloin tällöin hätkähdyttäviä neronleimuksia. Oma taitonsa on rakentaa matemaattinen malli mahdollisimman yleiseksi siten, että kiinnostavia teoreemoja voidaan sen puitteissa ylipäätään muotoilla ja todistaa. Tälläkin alueella Shapley on omaa luokkaansa.² Hänen Nobel-palkinnon tuoneet tutkimuksensa julkaistiin pääasiassa 1960 ja 1970-luvuilla. Esitelen näitä töitä jäljempänä.

¹ *Matchingmarkkinoiden teoriasta ja ensimmäisistä sovellutuksista Roth ja Sotomayor (1990) on edelleen käyttökelpoinen läbde. Rothin katsausartikkeleista (Roth 2008a,b) saa hyvän käsityksen siitä, mitä 20 viime vuoden kuluessa tällä alalla on saatu aikaan (ks. myös Kungliga Vetenskapsakademien 2012).*

² *Tätä artikkelia kirjoittaessani vilkaisin Shapleyn CV:tä hänen kotisivullaan. Kakkosrivivälillä kirjoitettu runsaasti alotsikoita sisältävä CV mahtuu helposti kahdelle A4-liuskalle.*

Roth syntyi 1951. Hän väitteli operaatiotutkimuksen tohtoriksi Stanfordin yliopistossa 1974. Taloustieteilijän uransa Roth aloitti tutkimalla sopimuksentekomalleja. Hänen kirjansa *Axiomatic models of bargaining* (Roth 1979) esitteli alan tärkeimmät siihen mennessä julkaistut tulokset. Kirjassa viitataan Rothin omien artikkeleiden lisäksi muun muassa Aumannin, Harsanyin, Myersonin, Nashin, Schellingin ja Shapleyn töihin. Nämä kaikki ovat taloustieteen nobelisteja, joidle palkinto on myönnetty peliteorian alalta tehdystä työstä vuonna 1994 tai sen jälkeen. Saavutuksena voidaan pitää myös sitä, että Rothin kirjassa käytämä notaatio ja terminologia ovat muodostuneet alan standardeiksi. Samaan aikaan 1970 ja 1980-lukujen vaihteessa Roth alkoi kokeellisesti tutkia ihmisten käyttäytymistä neuvottelutilanteissa. Häntä voidaankin pitää yhtenä kokeellisen taloustieteen pioneerinä.

Nobel-palkinto Rothille heltisi kohtaantoteorian (*matching theory*) kehittämisestä ja soveltamisesta. Tämäkin vaihe hänen urallaan alkoi jo 1980-luvun alussa. Näitä töitä tarkastellessa hämmästyttää tulosten merkittävyyden ohella niiden erilaisten menetelmien määrä, joita hän yhdessä kollegojensa kanssa on käyttänyt ja kehittänyt ongelman tutkimisessa. Tavomaisten peliteoreettisten työkalujen (ydin, Nashin tasapaino, evolutionääriset mallit jne) lisäksi on käytetty laboratoriokeiteita, ekonometriaa ja tietokonesimulaatioita.

Stabiilit allokaatiot

Tunnetuin kooperatiivisten pelien tasapainokäsite on ydin, jota D.B. Gillies (1953) ja Shapley (1953c) käsittelivät seminaariesitelmissään. Kooperatiivisissa peleissä, joissa on n pelaajaa ja joissa hyöty on vapaasti siirrettävissä pelaaji-

en välillä, *pelii kuvaava karakteristinen funktio* v antaa kullekin pelaajien osajoukolle (koalitiolle) $S \subset N = \{1, \dots, n\}$ lukuarvon $v(S)$, joka kuvaa sitä miten paljon jaettavaa hyötyä tämän koalition jäsenet yhteisvoimin voivat aikaansaada. Pelin v ydin koostuu sellaisista hyötyvektoreista $x = (x_1, \dots, x_n)$, joille pätee

$$v(N) = \sum_{i \in N} x_i, \text{ ja } v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i, \forall S \subset N.$$

Toisin sanoen, pelaajille annetaan niin paljon hyötyä kuin kaikkien pelaajien koalitio N pystyy tuottamaan siten, ettei yksikään pienempi koalitio pysty yksin toimimalla takaamaan jäsenilleen suurempaa hyötyä. Ytimessä olevat hyötyallokaatiot ovat tässä mielessä *stabiileja*.

Ydin voi olla tyhjä. Silloin kaikkia käyviä hyötyallokaatioita $x = (x_1, \dots, x_n)$ kohti löytyy joku koalitio S , joka pystyy takaamaan omille jäsenilleen suuremman hyödyn. Ydin voi olla tyhjä, vaikka peli olisi *monotoninen*: koalition S koon kasvaessa myös sen arvo $v(S)$ kasvaa. Bondareva (1963) ja Shapley (1967) esittivät toisistaan riippumatta täsmällisen karakterisoinnin sille pelien luokalle (ns. ”tasapainotetut pelit”), jossa pelin ydin ei ole koskaan tyhjä.

Shapley (1971) osoitti, että ns. *konveksien pelien* ydin ei ole koskaan tyhjä. Konvekseille peleille pätee monotonisuus eli koalition kasvaessa myös koalition arvo kasvaa, mutta konveksien pelien tapauksessa koalition arvo kasvaa riittävällä vauhdilla (vrt. kasvava funktio ja kasvava konvekssi funktio). Ytimen olemassaolon Shapley todisti näyttämällä, että Shapley-arvo on konveksin pelin ytimessä. Monissa sovellutuksissa (mm. kustannusten jako-ongelmat ja konkurssiongelmat, ks. Thomson 2003) ongelmaa vastaava peli on automaattisesti konvekssi. Siten Shapleyn tulos liittyy näppärästi

yhteen Shapley-arvon ja ytimen sovellutusten kannalta kiinnostavassa pelien luokassa.³

Läheskään kaikissa sovellutuksissa hyöty ei ole vapaasti siirrettävissä pelaajien kesken, ts. koalition arvoa ei voida mitata yhdellä reaalityyppillä. Ytimen käsite voidaan kuitenkin laajentaa myös tällaisten pelien luokalle. Aina ei ole edes mielekästä pitää tavoitteena sitä, että suuri koalitio kirjaimellisesti muodostuu. Esimerkiksi avioliittoja on ainakin länsimaissa vanhaan pidetty kahden kauppana, vaikkei tämä luonnehdinta ehkä aina tiukkaa empiiristä testaamista kestäkään. Mutta ainakin periaatteessa voidaan tarkastella, olisiko mahdollista muodostaa sellaisia avioliittoja (avioparin muodostaisi yksi nainen ja yksi mies), jotka ovat jossakin mielessä stabiileja annetussa populaatiossa.

Gale ja Shapley (1962) tutkivat tätä ongelmaa. Heidän mallinsa esitetään nykyään siten, että on kaksi erillistä osajoukkoa M (miehet) ja N (naiset). Kullakin miehellä on preferenssijärjestys yli naisten, ja kullakin naisella on preferenssijärjestys yli miesten. Preferenssit voivat olla hyvin erilaisia, eikä niitä välttämättä tarvitse esittää hyötyfunktioilla, puhumattakaan, että hyödyn tarvitsi olla siirrettävissä pelaajalta toiselle. Pelaajien mahdollisia avioliittoja kuvataan kohtaantofunktiolla

$f: NUM \rightarrow NUM$ jolle pätee joko A) $f(i) = j, f(j) = i, i \in N, j \in M$, tai B) $f(i) = i$. Toisin sanoen (A) henkilö i muodostaa parin yhden henkilön j kanssa, joka on mies, jos ja vain jos i on nainen, tai (B) henkilö i jää yksin.

Kohtaanto f on *stabiili*, jos aina silloin, kun i pitää henkilöä j aidosti parempana vaihtoeh-

tona kuin kohtaannon i :lle määräämää henkilöä $f(i)$, niin silloin henkilö j pitää kohtaannon hänelle määräämää henkilöä $f(j)$ aidosti parempana kuin henkilöä i . Ytimen käsitettä voidaan käyttää tässäkin mallissa: katsotaan minkälaisia pareja tai yksineläjiä kohtaanto f määrää kullunkin osajoukkoon $S \subset NUM$, ja vaaditaan että stabiilius pätee kussakin osajoukossa. Tällä tavalla Galen ja Shapleyn stabiiliisuus saadaan ekvivalentiksi ytimen kanssa.

Gale ja Shapley osoittivat ytimen epätyhjyyden mahdollisimman vakuuttavalla ja tyylikkäällä tavalla: he konstruoivat algoritmin, jonka lopputuloksena on stabiili kohtaanto. Algoritmi tunnetaan viivästetyn hyväksymisen algoritmina (*deferred acceptance*, tästä lähtien DA-algoritmi). Se etenee seuraavasti.

Askel 1: Kukin nainen i ehdottaa avioliittoa sille miehelle j , joka on naisen i preferensseissä korkeimmalla (ellei nainen kaikkein mieluummin ole yksin). Ne miehet j , jotka ovat saaneet avioliittotarjouksia, *ottavat pitoon* sen naisen i , joka on miehen j preferensseissä korkeimmalla (ellei mies mieluummin ole yksin).

Askel k : Jos kellään niistä naisista, jotka eivät ole pidossa, ei ole jäljellä enää yhtään hyväksyttävää miestä, niin algoritmi päättyy tähän. Muussa tapauksessa jokainen nainen, joka ei ole pidossa, mutta jolla vielä on hyväksyttäviä miehiä, saa tehdä tarjouksen parhaalle sellaiselle miehelle, jota hän itse ei vielä ole kosinut. Miehet, jotka saavat tarjouksen, katsovat, onko parempi tyytyä siihen naiseen, joka jo on pidossa (jos pidossa on ketään) vai kannattaako nyt pidossa oleva nainen vaihtaa tähän viimeiseen tarjouksen tehneeseen naiseen. Ja niin edelleen.

³ Äänestyspelit ovat kiinnostava pelien luokka jossa ydin tyypillisesti on tyhjä. Shapley-arvoa voidaan käyttää näissä peleissä vallan mittaamiseen, jolloin pubutaan yleensä Shapley-Shubik -valtaindeksistä.

DA-algoritmi päättyy äärellisen monen kierroksen jälkeen, eikä ole kovin hankalaa todistaa, että näin saatu kohtaanto on stabiili. Algoritmia voidaan luonnollisesti soveltaa siten, että miehet tekevät tarjouksen ja naiset joko hylkäävät tai hyväksyvät tarjouksia. Tuloksena on silloinkin stabiili kohtaanto, mutta se saattaa olla eri kuin silloin kun naiset tekevät tarjouksen. Todella yllättävä on se Galen ja Shapleyn (1962) tulos, että miesten (naisten) tehdessä tarjouksia tuloksena oleva kohtaanto on kaikkien miesten (naisten) mielestä paras stabiili kohtaanto ja kaikkien naisten (miesten) mielestä huonoin stabiili kohtaanto.

Gale ja Shapley (1962) osoittivat myös, että DA-algoritmi yleistyy tapaukseen, jossa yhdellä miehellä (yrityksellä, koululla) voi olla useita naisia (työntekijöitä, oppilaita). Tällaisista sovellutuksista he nimenomaan olivat kiinnostuneitakin.⁴ Myös stabiilisuustulokset yleistyvät kunhan tehdään rajoittava oletus, että koulun preferenssijärjestys yli oppilaiden osajoukkojen riippuu pelkästään preferensseistä yli yksittäisten oppilaiden: erilaisilla oppilaiden osajoukoilla ei siis voi olla mitään synergiaetuja tai -haittoja. Oppilaiden tehdessä tarjouksia koulu ottaa kiintiönsä rajoissa pitoon preferenssijärjestyksessä korkeimmalla olevat tarjouksen tehneet oppilaat.

Tätä vahvaa oletusta koulujen preferenssien riippumattomuudesta oppilaiden osajoukkojen koostumuksesta voidaan lieventää jonkin verran, kunhan oppilaat tietyllä tavalla ovat toistensa substituutteja (ks. Roth 2008). Oppilaiden ollessa substituutteja Roth (1986) saa myös erään käytännön kannalta kiinnostavan tulok-

sen, joka tunnetaan nimellä *rural hospital theorem*. Tämän tuloksen mukaan jos oppilas *i* ei pääse mihinkään kouluun *tietyissä* stabiilissa kohtaannossa, niin hän ei pääse mihinkään kouluun *missään* stabiilissa kohtaannossa. Lisäksi jos joku koulu saa oppilaita vähemmän kuin mikä sen kapasiteetti on, niin silloin tämä koulu saa aina samat oppilaat *kaikissa* stabiileissa kohtaannoissa. Tulos ei riipu mistään algoritmista, vaan se pätee kaikille stabiileille kohtaannoille, kunhan preferenssit on annettu.

Jos pohditaan kysymystä miten tällaiset markkinat tulisi organisoida, yhtenä luontevana lähtökohtana on hoitaa asia keskitetysti: pelaajat raportoivat preferenssinsä keskusorganisaatiolle (*clearinghouse, matchmaker*), joka sitten generoi kohtaannon käyttäen siihen jotakin tiettyä pelaajien tiedossa olevaa mekanismia. Tällöin esille nousee mm. sellainen kysymys kuin että kannattaako osallistujien raportoida preferenssinä totuudenmukaisesti.⁵

Roth on tälläkin saralla ollut uranuurtaja. Hän osoitti (Roth 1985), ettei sellaista mekanismia ole olemassa, jossa kaikkien kannattaisi aina raportoida totuudenmukaisesti. Mutta DA-algoritmissa tarjouksien tekijäpuoli ilmoittaa *aina* oikeat preferenssinsä, siis riippumatta siitä, mitä preferenssejä muiden osallistujien mahdollisesti oletetaan raportoivan. Lisäksi Roth (1985) osoitti, että oppilaiden tehdessä tarjouksia saavutetaan oppilaiden kannalta Pareto-optimaalinen allokaatio. Sen sijaan jos koulut tekevät tarjouksia, niin allokaatio ei välttämättä ole edes koulujen kannalta Pareto-optimaalinen.

Mietitään kysymysparia a) perustetaanko kouluja oppilaita varten vai b) ovatko oppilaat

⁴ *Puhun jatkossa oppilaista ja kouluista ja tapauksesta joissa koulut voivat hyväksyä kapasiteettinsa rajoissa useita oppilaita.*

⁵ *Asymmetrisen informaation vaikutuksista ks. Roth 2008, Kojima ja Pathak 2009.*

olemassa kouluja varten. Jos päädytään vaihtoehtoon a), silloin viivästetyn hyväksymisen algoritmi, jossa oppilaat tekevät tarjouksia, alkaa vaikuttaa hyvältä mekanismilta. Tässäkin järjestelmässä kouluilla on oikeus hyväksyä tai hylätä hakija oppilaakseen.

Mikäli koulujen itsemääräämisoikeutta oppilaiden valinnassa käytettävistä kriteereistä on suuresti rajoitettu, tilanne alkaa muistuttaa ns. *yksipuolisia* markkinoita, joilla vain toisella markkinaosapuolella on mahdollisuus strategiaan käyttäytymiseen (*kaksipuolisilla* markkinoilla tämä on mahdollista molemmille osapuolille). Tällöin DA-algoritmi, jossa oppilaat tekevät tarjouksia, vaikuttaa entistakin paremmalta mekanismilta, koska koulujen preferensseistä ei ole mitään epäselvyyttä.

Yksipuolisten markkinoiden tapauksessa käytettävissä olisi myös ns. *top trading cycle*-algoritmi (TTC-algoritmi).⁶ Siinä joku oppilasta nimeää omasta mielestään parhaan koulun. Tämä koulu ilmoittaa, mikä koulun kriteerien kannalta on paras oppilas. Tämä oppilas saa sen jälkeen nimetä parhaan koulun (jossa vielä on tilaa), ja niin edelleen. Äärellisen monen askeleen jälkeen saadaan aikaan sykli, jossa olevat oppilaat pääsevät nimeämiinsä kouluihin. Sen jälkeen algoritmia sovelletaan jäljelle jääneisiin kouluihin ja oppilaisiin, kunnes kaikki oppilaat on allokoitu tai jäljelle jääneet oppilaat eivät enää mahdu mihinkään kouluun. TTC-algoritmi tuottaa oppilaiden kannalta Pareto-optimaalisen stabiilin allokaation ja oppilaat ilmoittavat aina oikeat preferenssinsä. Toisin kuin DA-algoritmi, TTC-algoritmi ei tuota aina stabiilia allokaatiota kaksipuolisilla markkinoilla.

⁶ Algoritmi esitettiin ensi kertaa Shapleyn ja Scarfin (1974) artikkelissa. He antavat kunnian algoritmista David Galelle, joka puolestaan on sanonut että DA-algoritmi oli Shapleyn keksintö.

Esitetyissä kohtaantomalleissa rahalla ei ole mitään roolia, ja preferenssit ovat ordinaalisia. Shapley ja Shubik (1971) esittivät ”assignment-mallin”, joka itse asiassa on Shapleyn ja Galen avioliittomarkkinamalli silloin, kun mallissa hyöty (= raha) on vapaasti siirrettävissä pelaajien välillä. Koalition S arvon $v(S)$ määrittämiseksi lasketaan yhteen koalitioon kuuluvien pariskuntien tuottamat hyödyt (ts. vain avioparit voivat generoida hyötyä eli rahaa). Shapley ja Shubik osoittivat tietynlaisen lineaarisen optimointiongelman avulla, että mallissa ydin on epätyhjä ja geneerisesti ytimessä muodostettavat avioliitot ovat yksikäsitteisiä ja että rahaa liikkuu vain avioliittojen sisällä.

Myöhemmin tätä mallia on yleistetty siten, että miehillä (yrityksillä) voi olla useita vaimoja (työntekijöitä). Yllättävää on, että DA-algoritmin muunnos (tarjoukset ovat palkkatarjouksia tai –pyyntöjä) tuottaa näissäkin malleissa ytimen allokaation (ks. Crawford ja Knoer 1981; Kelso ja Crawford 1982; Roth 1984). Raha jakaantuu siten, että tarjouksia tekevä osapuoli saa kannaltaan parhaan lopputuloksen ja hyväksyvä osapuoli huonoimman. Nämä mallit ovat osoittautuneet hyödyllisiksi, kun on tutkittu kohtaanto- ja huutokauppateorian välisiä yhteyksiä (Hatfield ja Milgrom 2005)

Markkinoiden suunnittelu

Kun hyödykkeet ovat jaottomia ja heterogeenisiä, hintamekanismi ei välttämättä toimi tyydyttävästi. Ongelma korostuu, jos potentiaalisia kaupankävijöitä on suhteellisen vähän, jolloin koordinoitongelmista saattaa tulla merkittäviä ja kukin toimija saa ehkä vain hyvin suppean otoksen mahdollisista transaktioista. Rothin (2008b) mukaan tällaisista *obuista markkinoista* pitäisi päästä eroon luomalla markkinapaik-

ka, jossa riittävän suuri määrä toimijoita voisi vertailla erilaisia kaupankäyntimahdollisuuksia. Toisaalta tällöin uudeksi ongelmaksi voitulla *ruubkautuminen*: toimijoilla ei kenties jää kylliksi aikaa tehdä vertailuja monien erilaisten vaihtoehtojen välillä, kun tarjouksia pitäisi tehdä ja niihin pitäisi reagoida nopeasti. Kolmanneksi markkinoille osallistuminen pitäisi tehdä houkuttelevaksi ja turvalliseksi. Kaupankäyntisääntöjen pitäisi olla yksinkertaisia ja selviä, ja strategisen käyttäytymisen mahdollisuus pitäisi minimoida hyvinvointitappioiden välttämiseksi. (Roth 2008a,b).

Alvin Roth yhteistyökumppaneineen on menestyksekkäästi käyttänyt kohtaantomalleja tällaisten hankalien allokointiongelmien ratkaisemiseksi. Yksi tunnetuimmista sovellutuksista on uusien lääketieteen tohtoreiden sijoittaminen sairaaloihin lääkäriksi pätevöitymistä varten USA:ssa. Tällä hetkellä käytössä olevaa Rothin konstruoimaa algoritmia (muunnos DA-algoritmista) käytetään nykyään yli 30 erilaisella työmarkkinalla (Roth 2008b). Toinen tunnettu esimerkki on oppilaiden sijoittaminen kouluihin. Roth yhteistyökumppaneineen on uudistanut muun muassa New Yorkin ja Bostonin koulupiireissä käytettävät allokointimenetelmät. Nämä menetelmät ovat sen jälkeen levinneet muihinkin kaupunkiin. Kolmantena mainittakoon munuaisten luovutus- ja vaihto-ohjelma (*New England Program for Kidney Exchange*).

Alaa, jossa peliteorian ja modernin mikroteorian avulla pyritään kehittämään instituutioita ja menetelmiä em. hankalien allokointiongelmien ratkaisemiseksi, kutsutaan markkinoiden suunnitteluksi (*market design*). Huutokauppateoria sovellutuksineen on toinen edustava esimerkki. Markkinoiden suunnittelua on toki jossain mielessä harjoitettu vuosisatoja,

kun kaupankäyntitapoja ja -instituutioita on kehitetty. Tällä hetkellä ala on maailmalla kovassa kasvussa. Luulisi kysyntää löytyvän myös pienten markkinoiden vaivaamista kansantalouksista. □

Kirjallisuus

- Bondareva, O. N. (1963), "Some Applications of Linear Programming to the Theory of Cooperative Games", *Problemy Kibernetiki* 10: 119–139.
- Crawford, V.P. ja Knoer, E.M. (1981), "Jobmatching with Heterogeneous Firms and Workers", *Econometrica* 49: 437–450.
- Gale, D. ja Shapley, L.S. (1962), "College Admissions and the Stability of Marriage", *American Mathematical Monthly* 69: 9–15.
- Gillies, D.B. (1953), "Location of Solutions", teoksessa *Report of an Informal Conference on the Theory of n-Person Games*, Princeton University March 20–21, 1953: 11–12. Mimeo, Department of Mathematics, Princeton University.
- Kelso, A.S. ja Crawford, V.P. (1982), "Job Matching, Coalition Formation, and Gross Substitutes", *Econometrica* 50: 1483–1504.
- Kojima, F. ja Pathak, P.A. (2009), "Incentives and Stability in Large Two-Sided Matching Markets", *American Economic Review* 99: 608–627.
- Kungliga Vetenskapsakademien (2012), *Stable Allocations and the Practice of Market Design*, Scientific Background on the Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2012, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012/advanced.html (viitattu 8.1.2012)
- Hatfield, J.W. ja Milgrom, P. (2005), "Matching with contracts", *American Economic Review* 95: 913–935.
- Roth, A. E. (1979), *Axiomatic Models of Bargaining*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems no. 170, Springer-Verlag, http://kuznets.fas.harvard.edu/~aroth/Axiomatic_Models_of_Bargaining.pdf

- Roth, A.E. (1982), “The Economics of Matching: Stability and Incentives”, *Mathematics of Operations Research* 7: 617–628.
- Roth, A.E. (1984), “Stability and Polarization of Interests in Job matching”, *Econometrica* 52: 47–57.
- Roth, A.E. (1989), “Two-sided Matching with Incomplete Information about Others Preferences”, *Games and Economic Behavior* 1: 191–209.
- Roth, A.E. ja M. Sotomayor (1990), *Two-sided Matching: A Study in Game-theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monograph Series, Cambridge University Press, Cambridge.
- Roth, A.E. (2008a), “Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and Open Questions”, *International Journal of Game Theory* 36: 537–569.
- Roth, A.E. (2008b), “What Have We Learned from Market Design?”, *Economic Journal* 118: 285–310.
- Shapley, L.S. (1953a), “A Value for n-person Games”, teoksessa Kuhn, H.W. ja Tucker, A.W. (toim.) *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 2, Princeton University Press, Princeton NJ.
- Shapley, L.S. (1953b), “Stochastic Games”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 39: 1095–1100.
- Shapley, L.S. (1953c), “Open Questions”, teoksessa *Report of an Informal Conference on the Theory of n-Person Games*, Princeton University March 20-21, 1953: 15. Mimeo, Department of Mathematics, Princeton University.
- Shapley, L.S. (1967), “On Balanced Sets and Cores”, *Naval Research Logistics Quarterly* 9: 45–8.
- Shapley, L.S. ja Shubik, M. (1971), “The Assignment Game I: The Core”, *International Journal of Game Theory* 1: 111–130.
- Shapley, L.S. (1971), “Cores of Convex Games”, *International Journal of Game Theory* 1: 11–26.
- Shapley, L.S. ja Scarf, H. (1974), “On Cores and Indivisibility”, *Journal of Mathematical Economics* 1: 23–37.
- Thomson, W. (2003), “Axiomatic and Game-theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems: A Survey”, *Mathematical Social Sciences* 45: 249–297.