

Tutkimus aggregointiteoriasta, erityisesti indeksteoriasta¹

Heikki Pursiainen
VTT, erikoistutkija
Kilpailuvirasto

1 Aggregointikonsistenssin intuitiivinen tulkinta

Väitöskirjatutkimukseni käsittelee taloudellista aggregointia ja indeksteoriaa. Tutkimuksessa esitetään yleinen määritelmä ns. *aggregointikonsistenssille* (consistency in aggregation) ja tarkastellaan määritelmän toteuttavien aggregointimenetelmien, erityisesti indeksikaavojen, matemaattista rakennetta. Aggregointikonsistenssi lienee käsitteenä useille lukijoille tuntematon, joten yritetään valaista sitä yksinkertaisella esimerkillä.

Tarkastellaan henkilöä, joka on sairaalloisen kiinnostunut laajasta omaisuudestaan. Omaisuuteen kuuluu suuri joukko erilaisia varallisuusesineitä. Omaisuuden kokonaisarvo voidaan muodostaa varsin yksinkertaisella aggregointimenetelmällä, nimittäin laskemalla yksittäisten esineiden arvot yhteen. Omistajan

sairaalloisuus ilmenee tarpeena suorittaa jatkuvasti omaisuutta koskevia laskelmia. Joka päivä henkilö luokittelee omaisuutensa eri periaatteen mukaan. Yhtenä päivänä luokitteluperusteena on väri, toisena paino, kolmantena hankinta-ajankohta. Valittuaan päivän luokitteluperusteen henkilö laskee kuhunkin luokkaan kuuluvien esineiden arvon ja kokoaa nämä taulukkaan.

Henkilön taulukolla havaitaan olevan seuraavat ominaisuudet: Ensiksikin koko omaisuuden arvo saadaan laskemalla yhteen eri luokkien kokonaisarvot. Kokonaisarvon laske-
miseksi ei siis tarvitse enää tietää kuinka monta tai minkä arvoisia esineitä kuhunkin luokkaan kuuluu, luokkien kokonaisarvot ovat ainoa tarpeellinen informaatio. Lisäksi kokonaisarvon laskeminen tapahtuu samalla aggregointimenetelmällä kuin luokka-arvojen laskeminen, siis yhteenlaskun avulla. Havaitaan myös, että edellä mainittu pätee, olipa päivän luokitteluperuste mikä tahansa. Näiden yhteenlaskun

¹ Kirjoitus perustuu Helsingin yliopistossa 4.11.2005 tarkastettuun väitöskirjaani Consistent Aggregation Methods and Index Number Theory. Väitöstilaisuudessa vastaväittäjänä toimi prof. Charles Blackorby Warwickin yliopistosta ja kustoksena prof. Yrjö Vartia Helsingin yliopistosta.

tapauksessa triviaalien ominaisuuksien yleistyksen juuri se, mitä tarkoitetaan aggregointikonsistenssilla.

2 Aggregointikonsistenssin määritelmä ja sitä koskeva esityslause

Esimerkin kaltainen tilanne on erältä osin varsin yleinen taloudellisia aggregaatteja muodostettaessa. Aggregaatit, esimerkiksi hintaindeksit, ovat itse asiassa useiden eritasoisten tunnuslukujen muodostamia hierarkkisia rakenteita. Aggregoinnin kohteena on useita tilastoyksiköitä, kuten hyödykkeitä, yrityksiä tai kotitalouksia koskevia mittaustuloksia. Nämä on luokiteltu jollakin tarkastelun kohteen kannalta relevantilla perusteella, kuten käyttötarkoituksen, toimialan, koon tms. mukaan, ositteisiin. Jokaiselle ositteelle lasketaan oma välitason aggregaattinsa kyseistä ositetta koskevien mittaustulosten perusteella. Välitason aggregaattien lisäksi lasketaan tietenkin myös kokonaisaggregaatti kaikkien mittaustulosten perusteella.

Hyvän esimerkin tällaisesta rakenteesta tarjoaa kuluttajahintaindeksi. Alimmalla tasolla on muodostettu hintasuhteet yksittäisille kulutushyödykkeille. Nämä on jaoteltu käyttötarkoituksen tms. mukaisesti hyödykeryhmiin, kuten elintarvikkeisiin, vaatteisiin jne. Näitä välitasoja voi olla useita. Korkeimmalla tasolla on kaikille kulutushyödykkeille laskettu kokonaisindeksi. Jokainen osaindeksi lasketaan samalla indeksikaavalla kuin kokonaisindeksi.

Kuvatun kaltainen hierarkia muistuttaa aikaisempaa esimerkkiä. Herääkin kysymys, toteuttaako aggregointimenetelmä, esimerkiksi indeksikaava, vastaavat yhteensopivuusehdot kuin saiturin omaisuuslaskelma. Yleisesti nämä ehdot voidaan muotoilla seuraavasti:

1. Onko mahdollista liikkua korkeammalle aggregointitasolle pelkästään juuri edeltävän tason informaation perusteella? Onko esimerkiksi mahdollista laskea kokonaiskulutuksen hintaindeksi vain hyödykeryhmittäisen informaation perusteella?
2. Jos ensimmäinen ehto toteutuu, onko siirtyminen ylemmälle tasolle mahdollista tehdä käyttäen samaa aggregointimenetelmää, esimerkiksi indeksikaavaa, kuin millä alemman tason aggregaatit on laskettu?
3. Toteutuvatko kaksi ensimmäistä vaatimusta olipa käytetty ositus mikä tahansa? Voitaisiinko esimerkiksi kulutushyödykkeet luokitella mielivaltaisella tavalla ja silti pitää kaksi ensimmäistä ehtoa voimassa?

Mikäli jokin aggregointimenetelmä toteuttaa nämä ehdot, sitä kutsutaan aggregointikonsistentiksi.

Aggregointikonsistenssi on varsin tärkeä ominaisuus paitsi teoreettisesti myös esimerkiksi käytännön tilastonlaadinnassa. Syitä tähän on useita. Ensiksikin on selvää, että aggregointikonsistenteissa rakenteissa vallitsee selkeä tiedollinen ekonomia, koska kaikki käytössä olevan aineiston informaatio, joka korkeamman tason laskelmiin tarvitaan, sisältyy tätä juuri edeltävän tason aggregaatteihin. Rakenne selkiyttää myös eri tasojen välisten laskelmien suhteita. Kiusallista epäyhteensopivuutta osa-aggregaattien ja kokonaisaggregaattien tai eri luokittelussa saatujen tulosten välillä ei synny.

Huolimatta käsitteen intuitiivisesta selkeydestä ja asiaan kohdistuneesta varsin laajasta kiinnostuksesta indekseiteoreetikkojen piirissä, yleinen määritelmä aggregointikonsistenssille (tästedes myös lyhemmin konsistenssi) on puuttunut. Tutkimuksessa esitetään tällainen

määritelmä. Lisäksi todistetaan, että menetelmä on konsistentti jos ja vain jos se voidaan johtaa kahden mittauksen aggregoinnista rekursiivisesti. Toisin sanoen, menetelmä mille tahansa aggregoitavien mittausten määrälle palautuu kahden mittauksen aggregointiin seuraavasti: aggregoidaan kaksi ensimmäistä mittausta, aggregoidaan sitten näin saatu tulos kolmannen mittauksen kanssa jne. Järjestys, jossa tämä tehdään, ei saa vaikuttaa lopputulokseen.

Täsmällisemmin voidaan sanoa, että konsistentti menetelmä on aina esitettävissä vaihdannaisen ja liitännäisen binäärioperaation toistettuna soveltamisena. Toisaalta tällaisen operaation toistettu soveltaminen määrittelee myös aina konsistentin menetelmän. Vaihdannaisia ja liitännäisiä binäärioperaatioita kutsutaan algebrassa Abelin puoliryhmäoperaatioiksi. Mikä tahansa konsistentti aggregointimenetelmä määrittelee siis tietyn Abelin puoliryhmän ja päinvastoin.

Tämä esityslause formalisoi yllä esitetyn väitteen siitä, että aggregointikonsistenssi on yhteenlaskun ominaisuuksien yleistys, sillä yhteenlaskuhan on jossakin mielessä perustavanlaatuisin kaikista Abelin puoliryhmäoperaatioista. Tulos on kuitenkin varsin yleinen, sillä puoliryhmät ovat yksi matematiikan peruskäsitteistä, ja niitä esiintyy mitä erilaisimmissa matemaattisissa yhteyksissä. Reaalilukujen yhteen- ja kertolaskun lisäksi esimerkiksi vastaavat operaatiot kompleksiluvuilla ja funktioilla, kuten stokastisilla prosesseilla, joukkojen yhdistäminen ja leikkaus, ja vaikkapa kahden funktion konvoluutio ovat esimerkkejä Abelin puoliryhmäoperaatioista. Aggregoinnin kohteena voi olla lukujen lisäksi esimerkiksi vektoreita, funktioita, joukkoja tai relaatioita. Paitsi, että esityslause on sinänsä kiinnostava,

se tarjoaa hyvin voimakkaan työkalun aggregointiongelmien tutkimiseen palauttamalla nämä algebrallisiksi ongelmiksi, joihin voidaan siis soveltaa olemassa olevaa, pitkälle kehittyntä matemaattista teoriaa.

3 Sovellukset indeksiteoriaan, kvasilineaariset indeksit

Puoliryhmäesitystä koskevaa lausetta sovelletaan tutkimuksessa laajalti indeksiteoriaan. Keskeisenä tuloksena on konsistenssin palautuminen ns. kvasilineaariseen rakenteeseen indeksikaavojen tapauksessa, mikäli tietyt luonteet ehdot ovat voimassa. Ajatus on yksinkertainen: on yleisesti tunnettua, että reaalilukujen ja -vektorien tapauksessa säännölliset liitännäiset operaatiot palautuvat yhteenlaskuun. Tyypillinen esimerkki tästä on positiivisten lukujen kertolasku. Logaritmfunktiot palauttavat kertolaskun yhteenlaskuksi. Logaritmfunktion avulla saadaan kertolaskulle yhteenlaskuun perustuva esitys. Tutkimuksessa annetaan ehdot, joilla tämäntyyppinen esitys on olemassa indeksikaavoja vastaaville kolmiulotteisista vektoreista koostuville Abelin puoliryhmille. Indeksikaavoja, joilla on tämä esitys, kutsutaan kvasilineaariseksi.

Kvasilineaaristen indeksikaavojen yksinkertaisuus mahdollistaa funktionaaliryhtälöiden teorian soveltamisen niiden rakenteen tutkimiseen. Työssä johdetaan useita erilaisia tuloksia koskien tällaisten indeksikaavojen mahdollisia funktiomuotoja klassisen fisheriläisen indeksiteorian hengessä. Monet Fisherin esittämistä ns. testeistä saavat luontevan algebrallisen tulokinnan. Lisäksi koska kvasilineaarisen indeksikaavan kaikki ominaisuudet palautuvat toisaalta yhteenlaskun, toisaalta logaritmfunktio-

ta vastaavan isomorfismin ominaisuuksiin, riittää tutkia näitä. Tyypillisesti varsin kompleksisetkin testit redusoituvat näin yksinkertaisiin ns. Cauchyn funktionaaliyhtälön muunnoksiin.

Erityisen kiinnostavana voidaan pitää tulosta kvasilineaaristen indeksien ja arvomuutosten additiivisten hajotelmien yhteydestä. Myös tässä yhteydessä vertailu kertolaskun additiiviseen esitykseen logaritmfunktion avulla on oikea analogia.

4 Yhteys mikrotalousteoriaan

Tutkimuksen lopuksi tarkastellaan talousteorian ja konsistenttien indeksien välistä yhteyttä. Usein on esitetty väitteitä, että osaindeksien laskemista voidaan taloustieteen näkökulmasta perustella vain, jos sopivat separoituvuus ehdot ovat voimassa. Tämä pitää paikkansa,

mikäli vaaditaan eksakteja tuloksia. Jos sen sijaan tyydytään paikallisiin approksimaatioihin, tutkimuksessa osoitetaan, että konsistenttien indeksien osaindeksit approksimoivat talusteoreettisesti mielekkäitä suureita pienillä hinnanmuutoksilla. Lisäksi todetaan, että konsistentit indeksit ovat approksimaatiomielessä ”yhtä hyviä” kuin ns. superlatiiviset indeksit. Itse asiassa koko superlatiivisuuden käsitteeseen sisältyy ongelmia, mikä osoitetaan johtamalla funktiomuodoiltaan hyvin erikoisia ”indeksikaavoja”, jotka ovat kuitenkin superlatiivisia.

Lisäksi todetaan, ettei approksimaatiotulosten voimassaolo riipu teoreettisen indeksin valinnasta. Sekä ns. Konüs- että Malmquist-indeksejä voidaan approksimoida samoilla indeksikaavoilla. □