Tapaus Bosman taloustieteen näkökulmasta

TAPANI KOVALAINEN
kansantaloustieteen assistentti
Oulun yliopisto

1 Johdanto

Belgialainen jalkapalloilija Jean-Marc Bosman kävi pitkän oikeusprosessin omistajaseuraansa RFC Liegeä vastaan siitä, että seura vaati yleisen käytännön mukaisesti kyseisestä pelajasta siirtokorvausta jota ostajaseura ei suostunut maksamaan. Näin RFC Liegen vaatimus esti Bosmania vaihtamasta seuraa. Joulukuussa 1995 EU-tuomioistuin lopulta päätti, että koko siirtokorvausjärjestelmä on ristiriidassa työvoiman vapaata liikkumista koskevien EU-säädösten kanssa, joten järjestelmä on purettava. Samaisessa tuomioistuimen päätöksessä kiellettiin ns. ulkomaalaiskiintiöt, jotka olivat tähän saakka rajoittaneet ulkomaisten pelaajien määrää kussakin urheiluseurassa.

Vaikka päätös koskee vain pelaajasiirtoja maasta toiseen EU:n sisällä, tulee sama lähes varmasti koskemaan myös pelaajasiirtoja maiden sisällä. Tämä siksi, että tuntuu varsin oudolta ajatella, että työvoiman liikkuvuutta estävät seikat sallittaisiin maiden sisällä mutta ei maiden välillä. Toisaalta jos asia ei saa lainvoimaa niin pelaajiahan voidaan kierrättää maan sisällä käyttämällä näitä muodollisesti jonkin toisen EU maan urheiluseuran listoilla.

Kaikenkaikkiaan siis kyseinen päätös, sanottakoon sitä Bosman-päätökseksi johtaa tilanteeseen, jossa pelaajat voivat ilman rajoituksia eli ilman seurojen välisiä siirtokorvauksia ja ulkomaalaiskiintiöitä siirtyä EU:n alueella seurasta toiseen. Tämä on saanut urheilupiirit, sekä seurojen johtajat että myös pelaajat, hämmennykseen ja hämmennys kulminoituu periaatteessa kahteen toisiinsa liittyvään kysymykseen: mitä tapahtuu pelaajapalkkioille ja mihin suuntautuu pelaajavirta?

Tässä artikkelissa on tarkoituksena analysoida näitä kysymyksiä taloustieteen menetelmin. Tarkastelussa muodostetaan yksinkertainen täydellisen kilpailun oletuksiin perustuva pitkän aikavälin tasapainomalli kuvaamaan urheiluseurojen ja pelaajien välisiä markkinoita. Lisäksi mallin luonteesta johtuen implisiittisenä oletuksena on, ettei ulkomaalaiskiintiöinti ole aiheuttanut markkinoilla epätasapainotilaa. Näin ollen tarkastelussa keskitytään vain siihen, mitä tapahtuu pelaajapalkkioille ja pelaajavirroille kun siirtokorvaukset poistuvat.

Teoreettisesta tasapainomallista tehtävät johtopäätökset ovat taloustieteen tyypillistä komparatiivista statiikkaa. Näitä tuloksia peilaten artikkelin lopussa on esitetty näkemyksiä siitä, millainen on Suomen joukkueurheilulajien tulevaisuus.

2 Pelaajamarkkinat tuotannontekijämarkkinoina

2.1 Tarjonta

Vaikka pelaajamarkkinoilla käydäänkin kauppaa yksittäisistä pelaajista voidaan kuitenkin realistisesti olettaa, että markkinoilla itse asiassa ostetaan ja myydään panosta eli tuotannontekijää jota voidaan nimittää ammattitaidoksi. On luonnollista käsitellä markkinoita nimenomaan ammattitaidon markkinoina koska joukkueurheilussa pelaajien määrä on rajattu. Tällöin joukkueen "tuotannon määrää" (menestystä) ei voi lisätä pelaajamäärää kasvattamalla kuten voi olettaa tavallisen yrityksen tuotantoprosessissa vaan nimenomaan ammattitaidon määrää kasvattamalla.

Jokainen pelaaja omaa lajissaan tietyn ammattitaidon x ja olkoon x^j (> 0) pelaajan j (j = 1, ..., h) ammattitaito (human capital). Kukin x^j määräytyy yhtälöllä $x^j = x^j(F, H)$, missä F kuvaa pelaajan fyysiä ja H henkisiä kykyjä. Näihin puolestaan vaikuttavat erilaiset tekijät kuten esim. luontaiset lahjat, ikä, harjoittelun määrä jne. Jatkossa oletetaan, että tekijät ovat eksogeenisia ts. x^j ei määräydy kehiteltävän mallin muuttujien vaikutuksesta.

Vaikka yksittäisten pelaajien taidot muuttuvat ajan suhteen niin jatkossa oletetaan että aggregaattina ammattitaito on vakio tarkasteluajanjaksolla. Toisin sanoen tuotannontekijän kokonaismäärä X_s

$$1)\quad X_s = \sum_{j=1}^{h} x^j$$

on vakio. Koska x^j (j = 1, ..., h) on eksogeeninen on X^s eksogeeninen. Voidaan todeta, että lauseke 1) on panoksen x tarjonta, joka on riippumaton panoksen hinnasta (=vertikaalinen tarjontakäyrä).

Jos tuotannontekijän hintaa merkitään P:llä niin pelaajan j palkkio on Px^j [1]. Kokonaisuudessaan maksetaan pelaajapalkkioita

$$P \cdot X_s = P \sum_{j=1}^{h} x^j$$

Pelaajapalkkioerot syntyvät täten ammattitaitoerojen kautta. Esimerkiksi Helsingin Jokereiden pelaajien palkkiot ovat korkeampia kuin Oulun Kärppien pelaajien yksinkertaisesti siksi, koska he ovat ammattitaitoisempia, ei sen takia, että ammattitaidon hinta olisi korkeampi Jokereissa.

2.2 Kysyntä

Olkoon urheiluseuroja n kappaletta ja merkitään panoksen x määrää seurassa i symbolilla x_i (i = 1, ... ,n.). Seuran i näkökulmasta tarkasteltuna tuotannontekijän kokonaismäärä koostuu seuraavanlaisista komponenteista: Ensinnäkin siinä on mukana eksogeeninen $x_{i,s}$, joka kuvaa ilman siirtokorvauksia seuran käytössä olevaa panosmäärää. Tämän voidaan ajatella olevan mitä suurimmassa määrin omaa juniorityötä. Toisaalta panokseen kohdistuu eksogeeninen hävikki $x_{i,h}$ (lopettaminen, pysyvä loukkaantu-

[1] Urheiluseuroissa voidaan erottaa varsinaiset edustusjoukkueeet ja junioritoiminta. Edustusjoukkueiden pelaajilla x > 0 ja junioripelaajilla x = 0. Tällöin varsinaisilla pelaajamarkkinoilla ovat ne pelaajat joille ylipäätään maksetaan palkkioita.

minen jne). Vielä lopuksi seura voi ostaa ja myydä (tai vuokrata) panosta ja merkitään ostoja muuttujalla $x_{i,o}$ ja myyntejä muuttujalla $x_{i,m}$. Kaiken kaikkiaan saadaan

$$2)\ x_i = x_{i,o} - x_{i,m} + (x_{i,s} - x_{i,h})$$

jossa eksogeenista sulkulauseketta merkitään jatkossa z^i. Tällöin summaamalla yli seurojen saadaan

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i,o} - \sum_{i=1}^{n} x_{i,m} + \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

missä huomionarvoista on, että aggregaattina seurojen väliset panoksen ostot ja myynnit kumoavat toisensa.

Seuran urheilullinen menestys (M) riippuu x_i:stä ja oletetaan riippuvuus lineaariseksi eli $M_i = m_i x_i$, missä m_i (> 0)on vakioparametri. Funktio voidaan tulkita tuotantofunktioksi missä pelaajat ovat täydellisiä substituutteja ja m_i voisi olla esimerkiksi valmentajaan liittyvä parametri. Oletetaan vielä, että endogeeniset (netto)tulot (T) ovat lineaarinen funktio menestyksestä $T=t_iM$, ($t_i > 0$), missä t_i on vakioparametri. Tällöin tulojen ja ammattitaidon välinen relaatio on lineaarinen ja merkitään sitä $b_i x_i$ ($b_i = m_i t_i > 0$). Lisäksi seuralla voi olla muita tuloja ja merkitään niitä a_i . Kun vielä määritellään, että siirtokorvaus panosyksiköstä on K, ja muistetaan että panosyksikön hinta oli P, niin seuran i rahavirtoja voidaan kuvata seuraavasti

$$4)\ \begin{aligned} &a_i + b_i x_i - Px_i + K(x_{i,m} - x_{i,o}) \\ &\Leftrightarrow a_i + b_i x_i - Px_i - Kx_i + Kz_i \end{aligned}$$

Oletetaan, että seurojen tavoitteena on menestyksen maksimointi ehdolla, että varat riittävät toiminnan ylläpitämiseen. Formaali optimointitehtävä ja sen ratkaisu on esitetty liitteessä (A). Tällöin seuran käyttäytymistä luonnehtii ehto

$$5)\ a_i + b_i x_i + Kz_i - Px_i - Kx_i = 0$$

ts. tulot ovat menojen suuruiset. Samaan ehtoon päädyttäisiin myös olettamalla, että panoksen hinta P sopeutuu pitkällä aikavälillä niin, että seurojen rahalliset voitot menevät nollaan.

Ratkaisemalla optimiehto 5) x_i :n suhteen saadaan seuran i panoksen kysyntäfunktio

$$6)\ x_i = \frac{a_i + Kz_i}{P + K - b_i}$$

Kysyntäfunktion ominaisuuksia on tarkasteltu matemaattisesti liitteessä (B). Verbaalisesti ominaisuuksia voisi luonnehtia seuraavasti. Ensinnäkin, funktio on panoksen hinnan (P) suhteen laskeva. Toiseksi, eksogeenisten (netto)tulojen kasvu (a_i) nostaa panoksen määrää seurassa. Käytännön esimerkkinä tästä voisi olla jäähallivuokrien laskeminen. Kolmanneksi, jos seuran juniorityö (z_i) vahvistuu, vahvistuvat myös sen varsinaiset edustusjoukkueet.

Kysyntäfunktion ominaisuuksiin liittyy myös se, miten siirtokorvaukset vaikuttavat panoksen kysyntään. Toisin sanoen sen avulla voidaan arvioida Bosman-päätöksen vaikutuksia yksittäisien seurojen pelaajamateriaaliin. Kysyntäfunktiosta 6) saadaan

$$7)\ \frac{\partial x_i}{\partial K} = \frac{x_{i,m} - x_{i,o}}{P + K - b_i} \gtrless 0$$

Nähdään, että siirtokorvauksen vaikutukset panoskysyntään riippuvat siitä onko seura panoksen (netto)myyjä ($x_{i,m} - x_{i,o} > 0$) vai (netto)ostaja.($x_{i,m} - x_{i,o} < 0$)[1]. Ostajaseuroilla pelaajamateriaali paranee siirtomaksun poistuessa ja myyjäseuroilla käy päinvastoin. Tulosta voi

[1] On korostettava, että kyse on ammattitaidon ostoista ja myynneistä. Vaikka termi ($x_{i,m} - x_{i,o}$) olisi nolla, seura voi tehdä pelaajakauppoja. Tällöin vain

luonnehtia yksinkertaisesti niin, että seurat jotka ovat rahoittaneet toimintaansa pelaajamyynneillä tulevat menettämään yhden tulonlähteen, jolloin niillä ei ole varaa maksaa niin ammattitaitoisille pelaajille kuin aikaisemmin. Vastaavasti seuroilta,jotka ovat olleet ostajan roolissa poistuu yksi menoerä, jolloin niillä on resursseja maksaa paremmalle pelaajamateriaalille. Kaikenkaikkiaan Bosman-päätös siis jakaa pelaajat seuroihin niin, että toimintaansa pelaajamyynneillä rahoittaneet seurat tulevat heikkenemään ja ostopelaajien varassa toimineet seurat tulevat vahvistumaan.

2.3 Tasapaino

Siirrytään nyt tarkastelemaan seurojen ja pelaajien muodostamien markkinoiden tasapainoa. Markkinat tasapainottava hinta löydetään kun lasketaan yhteen seurojen kysyntäfunktiot 5) ja asetetaan tämä yhtäsuureksi panoksen tarjonnan kanssa eli tasapainossa aggregaattikysyntä (X_d) on tarjonnan (X_s) suuruinen. Saadaan

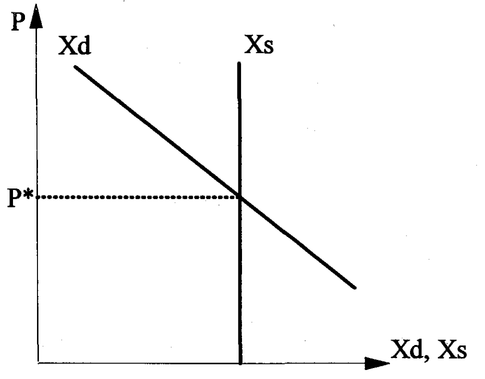
8) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = X_d = X_s \equiv X = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + Kz_i}{P^* + K - b_i}$$

missä P* on tasapainohinta. Lauseke 8) on markkinoiden tasapainolauseke ja samalla tuotannontekijän aggregaatti kysyntäfunktio. Muistaen että tarjontakäyrä on vertikaalinen voidaan tasapainon muodostumista hahmotella kuviolla 1).

Kuvion 1) mukaan tasapaino löytyy kysyntä- ja tarjontakäyrien leikkauspisteestä jolloin hinnaksi muodostuu P*. Kuviosta on myös helppo havaita, että kaikki ne tekijät jotka siirtävät kysyntäkäyrää ylös (alas) nostavat (laskevat) panoksen tasapainohintaa. Vastaavasti ne tekijät, jotka siirtävät tarjontakäyrää oikealle (vasemmalle) laskevat (nostavat) tasapainohintaa.

ostetut ja myydyt pelaajat ovat ammattitaidoiltaan täsmälleen samantasoisia.

Kuvio 1. Pelaajamarkkinoiden tasapaino



2.4 Bosman-päätös ja pelaajapalkkiot

Luvussa 2.2 olemme nähneet Bosman-päätöksen vaikutuksen yksittäisien seurojen pelaajamateriaaliin. Tässä luvussa tarkastelun kohteena on puolestaan Bosman-päätöksen vaikutukset pelaajapalkkioihin. Pelaajapalkkiot tulevat muuttumaan mikäli markkinat tasapainottava hinta P reagoi siirtokorvauksen poistuessa. Kuvioon 1) liittyen kysymys on siitä, miten aggregaattikysyntäkäyrä reagoi siirtokorvausten poistuessa.

Tarkastellaan aluksi erästä markkinoiden erityitilannetta ja oletetaan, että jokaisen seuran endogeeniset tulot karttuvat samalla tavalla ts oletetaan, että $b_i = b$ ($\forall$ i). Tällöin lausekkeesta 8) saadaan

$$9)\quad (P^* + K - b)X = \sum_{i=1}^{n} a_i + K\sum_{i=1}^{n} z_i$$

$$\Leftrightarrow P^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i + bX}{X}$$

Tässä ei kovinkaan epärealistisessa erikoistapauksessa P voidaan ratkaista eksplisiittisesti. Huomionarvoista lausekkeessa 9) on, ettei siinä esiinny lainkaan siirtokorvausta kuvaavaa muuttujaa K. Tämän takia muutokset siirtokorvauksessa eivät vaikuta tasapainohintaan. Selitys tälle löytyy tarkastelemalla lausekketta 7). Sen mukaan siirtokorvauksen lasku näkyy myyjäseuroilla kasvaneena panoksen tarjontana ostajaseuroille ja ostajaseuroilla lisäkysyntänä myyjäseuroilta. Kun nämä aggregoidaan yli kaikkien seurojen havaitaan että, tarjonnan kasvu on täsmälleen yhtä suuri kuin kysynnän kasvu ts.

$$10)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial K} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i,m} - x_{i,o}}{P + K - b} = 0$$

Tämän seurauksena markkinat tasapainottuvat entisellä hinnalla. Palataan seuraavaksi markkinoiden yleiseen tasapainolausekkeeseen 8). Nähdään (kts. liite C), että siirtokorvauksen muutosten vaikutukset tasapainohintaan riippuvat summasta

$$11)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i,m} - x_{i,o}}{P^* + K - b_i}$$

Jos summa on positiivinen (negatiivinen) hinta P laskee (nousee) siirtokorvauksen laskiessa. Lisäksi summa voi olla myös nolla, jolloin P pysyy ennallaan (vrt. edellä). Lauseketta 11) voidaan tulkita aivan samoin kuin lauseketta 10) ts. se kertoo panoksen tarjonnan ja kysynnän nettolisäyksen. Eli kun siirtokorvaus supistuu niin myyjäseurat tarjoavat lisää panosta pelaajamarkkinoille ja vastaavasti panoksen kysyntä on kasvanut ostajaseurojen osalta. Nyt jos myyjäseurojen yhteenlaskettu tarjonnan lisäys on suurempi kuin ostajaseurojen yhteenlaskettu kysynnän lisäys, on seurojen välisillä markkinoilla panoksen ylitarjonta, jolloin sen tasapainohinta laskee (pelaajapalkkiot laskevat). Vastaavasti jos kysynnän lisäys on suurempi pelaajapalkkiot nousevat.

Kuviossa 1) siirtokorvauksen lasku tarkoittaisi sitä, että myyjäseurojen reaktiot siirtävät kokonaiskysyntäkäyrää alas ja ostajaseurojen reaktiot ylös. Jos myyjäseurojen reaktiot ovat vahvemmat on lopputulemana, että kysyntäkäyrä jää alkuperäisen asemansa alapuolelle, jolloin P laskee.

3 Lopuksi

Tässä artikkelissa on pyritty tarkastelemaan Bosman-päätöksen vaikutuksia joukkueurheiluun liittyviin taloudellisiin aspekteihin. Kiinnostuksen kohteina ovat olleet pelaajapalkkiot sekä pelaajasiirrot. Artikkelissa kehitetyn pelaajien ammattitaidon markkinoita kuvaavan teoreettisen mallin avulla saadut tulokset Bossman-päätöksen seurauksista voidaan tiivistää seuraavasti. Siirtokorvausten poistuminen johtaa kasvaviin huippupelaajavirtoihin niihin urheiluseuroihin, jotka ovat tähänkin saakka pystyneet ostamaan riveihinsä ammattitaidoltaan parempia pelaajia kuin mitä ovat itse myyneet (ostajaseurat). Virta käy pois luonnollisesti niistä seuroista, jotka ovat toimineet päinvastoin (myyjäseurat). Tämä vaihdanta puolestaan vaikuttaa pelaajapalkkioihin ammattitaidon hinnan kautta, jos ostaja- ja myyjäseurojen välisille markkinoille syntyy epätasapainotilanne. Eli jos esimerkiksi ostajaseurat ovat valmiita hankkimaan itselleen ammattitaitoisia pelaajia (ammattaitoa) enemmän kuin mistä myyjäseurat ovat valmiita luopumaan ammattitaidon hinta nousee, jolloin pelaajapalkkiot kasvavat.

Arvioidaan lopuksi hyvin yleisellä tasolla mitä tapahtuu suomalaisessa joukkueurheilussa edellisen perusteella? Johdannossa mainittiin, että vaikka nykyinen Bosman-päätös koskee vain pelaajasiirtoja maasta toiseen, tulee sama mitä suurimmalla varmuudella koskemaan myös pelaajasiirtoja maan sisällä. Tällöin voi olettaa, että kaikki ne joukkueurheilulajit joissa siirtokorvausjärjestelmä on ollut käytössä joutuvat päätöksen vaikutuspiiriin. Selvimmin näitä ovat jääkiekko ja jalkapallo, mutta myös kansallispeli pesäpallo pääsee osalliseksi Bosman-päätöksestä. Edellä esitettyjen tulosten perusteella voi hyvin ennakoida, että kaikissa näissä lajeissa kansallisten sarjojen nykyiset ostajaseurat tulevat vahvistumaan entisestään. Toisaalta jos ostajaseurat ovat jo tähänkin saakka olleet parhaiten menestyviä, mitä ne kaiketi ovat olleet, tulevat kansalliset sarjat Bosman-päätöksen takia epätasaisemmiksi.

Jääkiekko ja jalkapallo ovat lisäksi lajeja, joita tulee koskettamaan joukkueurheilun kehitys koko EU:n alueella. Molemmissa lajeissa mutta ennenkaikkea jääkiekossa Suomi on ollut Euroopan alueella myyjän roolissa ja tällöin Bosman-päätös tarkoittaa parhaiden pelaajien virtaa pois Suomesta. Itse asiassa kesän 1996 aikana on useita kymmeniä suomalaisia jääkiekkoilijoita siirtynyt ulkomaille. Tilalle on tullut pelaajia ulkomailta, etenkin Ruotsista. Voisi leikkisästi väittää, että Suomesta lähtivät "ykköskentän miehet" ja tilalle tulivat "kakkoskentän miehet". Huomioiden tämä ja kehitys maan sisällä voi ennakoida, että jääkiekon SM-liigan taso laskee ja muuttuu epätasaisemmaksi.

Jos koko euroopalainen kehitys jääkiekon osalta on sitä, että huippupelaajat keskittyvät harvoihin seuroihin eli niihin joilla on varoja maksaa ammattitaitoisille pelaajille, kehitys johtaa todennäköisesti vastaavan tyyppisen liigajärjestemään kuin Pohjois-Amerikan NHL-liiga. Esivaihe tälle on syksyllä 1996 käyntiin pyörähtävä kolmivuotiseksi suunniteltu jääkiekon Eurooppa-liiga johon EU maista osallistuu kustakin 2-3 joukkuetta.

Jalkapallon osalta Bosman-päätös ei aiheuttane Suomessa kovinkaan suuria muutoksia. Mitään suurta pelaajavirtaa Eurooppaan ei ole odotettavissa, eikä myöskään maan sisällä tapahtune kovinkaan suurta muuttoliikettä. Sen sijaan voisi ennakoida, että eurooppalainen jalkapallo tulee muodostamaan vastaavantyyppisen huippuseuroista koostuvan liigajärjestelmän kuin on edellä ounasteltu jääkiekosta. Tälle on olemassa hyvänä pohjana ns. mestareiden liiga, jota pelataan tällä hetkellä kansallisilla kiintiöillä.

Pelaajapalkkioiden osalta kehitystä on vaikea ennustaa. Hyvä arvaus voisi olla, että ne eivät muutu yksilötasolla miksikään. Toisin sanoen tietyn ammattitaidon omaava pelaaja saa jatkossakin saman korvauksen. Pelaajavirrat seuroista toiseen tai Suomesta muualle Eurooppaan aiheuttavat kuitenkin aggregaattitasolla pelaajapalkkioiden muutoksia. Esimerkiksi huippujääkiekkoilijoiden virta Eurooppaan laskee SM-liigassa kokonaisuutena maksettuja pelaajapalkkioita.

Liite

A: Seuran i optimointitehtävä on muotoa

$$\max_{x_i}: m_i x_i$$

$$\begin{aligned} s.e \quad & a_i + b_i x_i + Kz_i - Px_i - Kx_i \geq 0 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

josta ensimmäisen kertaluvun ehdoiksi saadaan

$$m_i + \lambda_i(b_i - P - K) \leq 0$$
$$a_i + b_i x_i + Kz_i - Px_i - Kx_i \geq 0$$
$$(m_i + \lambda_i(b_i - P - K)) \cdot x_i = 0$$
$$(a_i + b_i x_i + Kz_i - Px_i - Kx_i) \cdot \lambda_i = 0$$
$$\lambda_i \geq 0$$
$$x_i \geq 0$$

B: Kysyntäfunktion

$$x_i = \frac{a_i + Kz_i}{P + K - b_i}$$

ominaisuuksia:

$$\frac{\partial x_i}{\partial P} = \frac{-(a_i + Kz_i)}{(P + K - b_i)} < 0$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_i} = \frac{1}{P + K - b_i} > 0$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_i} = \frac{K}{P + K - b_i} > 0$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial K} = \frac{(P - b_i)z_i - a_i}{(P + K - b_i)^2} = \frac{x_{i,m} - x_{i,o}}{P + K - b_i} \gtrless 0$$

C: $$X = \sum \frac{a_i + Kz_i}{P^* + K - b_i}$$

Implisiittisellä derivoinnilla saadaan

$$\frac{\partial P^*}{\partial K} = \frac{\sum \frac{(P^* - b_i)z_i - a_i}{(P^* + K - b_i)^2}}{\sum \frac{a_i + Kz_i}{(P^* + K - b_i)^2}} = \frac{\sum \frac{x_{i,m} - x_{i,o}}{P^* + K - b_i}}{\sum \frac{a_i + Kz_i}{(P^* + K - b_i)^2}}$$